Trabajo Fin de Grado
Facultad de Matemáticas

Teoría de Juegos

Alberto Torrejón Valenzuela
Doble Grado Matemáticas y Estadística
Sevilla, Junio 2020

Tutores:
Antonio Rufián Lizana y José Luis Pino Mejías

A mi hermano. Sigue trabajando, todo llega.

Índice general

Prólogo 9
Índice de Figuras 11
Índice de Tablas 13

1. Definición **15**
Estrategias 16
Concepto de utilidad 17
Equilibrio de Nash 18

2. Clasificación **19**
Clasificación general 19
Tipos de juegos 19

3. Juegos estratégicos **25**
Forma normal de un juego estratégico 25
Representación de un juego bipersonal 26
Representación de un juego de tres o más personas 28
Estrategias 29
Optimalidad de Pareto 30
Equilibrio de Nash 31
Equilibrio de Nash puro 32
Equilibrio de Nash mixto 35
Cálculo del equilibrio mixto 37
Interpretación del equilibrio mixto 38
Racionabilidad y dominancia 39
Equilibrio correlacionado 41
Equilibrio evolutivo 44
Comportamiento social 46

4. Juegos dinámicos **49**
Estrategias 53
Forma normal de un juego en forma extensiva 55
Juegos de tres o más jugadores 57
Equilibrio en juegos dinámicos 59
Equilibrio en subjuegos 59
Inducción hacia atrás 61
Críticas al equilibrio perfecto en subjuegos 63
Equilibrio secuencial 64

5. Ejemplo: *VNM-Póker* **67**

6. Juegos repetidos **75**
Modelo general 77
Aprender en juegos repetidos 80
Juego ficticio 80
Aprendizaje sin arrepentimiento 82
Regret Matching 82
Equilibrio en juegos repetidos 83
Otros modelos 87
Juegos estocásticos 88

7. Juegos cooperativos **89**
Comunicación entre jugadores 89
Coaliciones 90
Concepto de utilidad transferible 92
Juegos de utilidad transferible 93
Soluciones 97
El núcleo 97
El valor de Shapley 101
Juegos de utilidad no transferible 104

Bibliografía **108**

Agradecimientos

Brevemente reconocer cuales han sido los tres pilares fundamentales que me han ayudado a llegar hasta aquí: familia, amigos y profesores.

Agradecer en primer lugar a los mejores consejeros que he tenido, mis padres, Juan Antonio y Gaspara, y a mis abuelos. Gracias por todo.

"Y el niño crecía y se fortalecía y se llenaba de sabiduría;
y la gracia de Dios era sobre él". Lucas 2:40.

A mis amigos Dani, Kini, Alberto, Pablo, Paco, Pedro, Nacho y Adri, sus discusiones y distintos puntos de vista me han ayudado a ampliar mis fronteras.

Finalmente, a todos y cada uno de los profesores que han aplanado el camino facilitando mi travesía. A don Antonio por sembrar en mí la semilla de la curiosidad por el saber, a Borja por mantenerla latente, y a mis tutores, Antonio Rufián Lizana y José Luis Pino Mejías, por su confianza, consejos y valiosas correcciones gracias a las cuales este trabajo ha encontrado su forma a pesar de las circunstancias tan adversas.

Alberto Torrejón Valenzuela

Resumen

El siguiente trabajo tiene como objetivo el estudio de los diversos modelos de la Teoría de Juegos. Comienza con la definición (*capítulo 1*) de los términos más relevantes en el trascurso del texto seguido de la clasificación (*capítulo 2*) donde se muestran los criterios esenciales para la distinción de las diferentes clases de juegos. Tras los apartados introductorios, el texto entra en materia examinando los principales resultados sobre juegos no cooperativos: juegos estratégicos (*capítulo 3*), juegos dinámicos (*capítulo 4*) y juegos repetidos (*capítulo 6*), para terminar describiendo los juegos cooperativos (*capítulo 7*). Además se presenta un ejemplo, VNM-Póker (*capítulo 5*), que ayuda a la comprensión de los capítulos de juegos estratégicos y dinámicos.

Abstract

The following project aims to study the several models in Game Theory. It begins with the definition (*chapter 1*) of the most relevant terms in the course of the text followed by the classification (*chapter 2*) in which the essential criteria for the distinction of the games are shown. After the introductory sections, the text comes into question examining the main results of non-cooperative games: strategic games (*chapter 3*), dynamic games (*chapter 4*) and repeated games (*chapter 6*), to finish describing the cooperative games (*chapter 7*). In addition, an example is presented, VNM-Poker (*chapter 5*), which helps to understand the chapters of strategic and dynamic games.

Prólogo

”Que tus decisiones reflejen tus esperanzas, no tus miedos.”

Nelson Mandela

Es evidente que la toma de decisiones forma, quizás no el *todo* del ser humano, pero si el eje central de su desarrollo, de su madurez. Necesitamos tomar decisiones para avanzar en nuestra vida. Madurar conlleva optar, y por ende asumir, por decisiones más complejas e interrelacionadas con nosotros mismos, nuestros semejantes, nuestras vivencias y el conocimiento profundo de nuestro entorno. El andamiaje de nuestro conocimiento científico, filosófico, religioso e incluso nuestros instintos más primarios, son conexiones que nos pueden servir para desarrollar la confianza de asegurarnos un resultado previo, pero no siempre cuando optamos objetivamente se tiene como resultado la solución esperada.

En ocasiones nuestro juicio nos conduce a paraísos o infiernos que no contemplábamos o que no acabamos de cerrar. Esta explicación, quizás excéntrica de la toma de decisiones y sus consecuencias, la podemos ver reflejada en la paradoja del *Asno de Jean Buridán*, expuesta por sus detractores a modo de burla contra el racionalismo excesivo:

Un campesino alimentaba todos los días a su asno con dos sacos de heno, uno más grande que el otro, escogiendo siempre el asno el saco más grande de los dos. Un día el campesino le proporcionó dos sacos iguales y el asno, acostumbrado a saber que saco escoger siempre, no supo tomar un decisión clara y acabó desfalleciendo.

La paradoja muestra que, si no hay motivo que dirija la decisión, unas preferencias frente a otras, no habrá acción. Pone de relieve la máxima de elegir siempre la mejor opción partiendo de unos conocimientos débiles; ante dos opciones igual de “mejores” o “peores” el panorama se complica.

El razonamiento estratégico, que puede entenderse como el paso previo a la toma de decisiones, ha sido siempre la forma de prepararnos para afrontar un problema. La búsqueda de conocimientos que nos permitan mejorar nuestro resultado ha estado latente desde siempre. El aforismo que encontramos inscrito en el pronao del templo de Apolo de Delfos; *“conócete a ti mismo”*, es la reflexión que arma la estructura de nuestras elecciones. Abundando en ejemplos citamos el antiguo tratado chino, *El arte de la guerra*, de Sun Tzu (*maestro Tzu*), que data aproximadamente del s.V *a.C.* y en el que se recogen las principales estrategias militares de la época para la batalla, considerada una de las primeras publicaciones de la historia sobre estudio estratégico.

Sobre la capacidad de elegir y plantear opciones al ser humano, hemos de recordar el concepto de libre albedrío que transversalmente se desarrolla en el pensamiento judeocristiano, recogido en *Génesis* 1:26, *“siendo creado el hombre a imagen y semejanza de su creador”*, pasando por *Deuteronomio* 30:19-20, *“con capacidad de elegir, tomar sus decisiones”*, para reforzarlo en *Apocalipsis* 3:20, *“el hombre tiene que tomar sus decisiones”*.

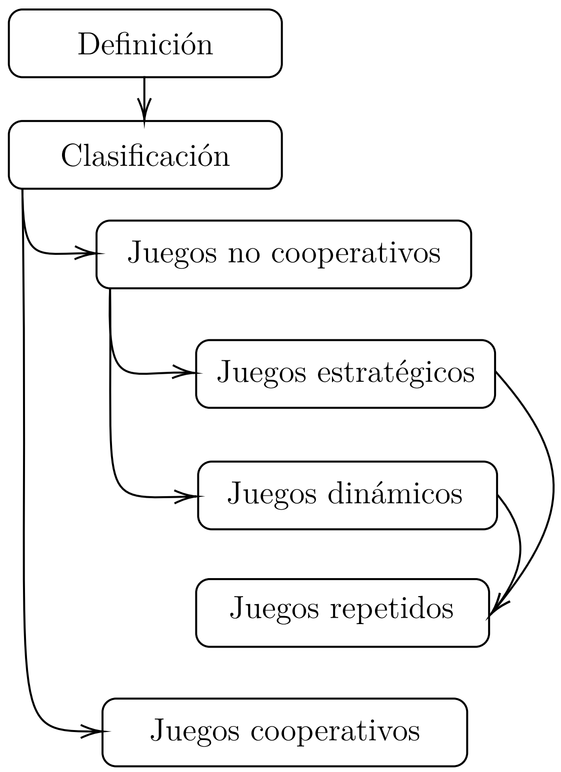
En el ámbito económico, la formalización de esta búsqueda no llegaría hasta 1944 con la publicación de *Theory of games and economic behaviour* por John von Neumann junto con Oskar Morgenstern, dotándosele del nombre de **Teoría de Juegos** y desarrollando los postulados básicos para el estudio de conflictos económicos, que luego extenderían otros matemáticos como: Albert W. Tucker, John Forbes Nash, o más tarde Reinhard Selten y John Maynard Smith, por citar algunos.

En el prólogo de su libro sobre comportamiento económico, John von Neumann dice que trata de hacer con la economía lo que Newton con el movimiento de los planetas. No se trata de describir lo que se ve, se trata de entender las causas para que las cosas sucedan y tratar de estimar el comportamiento futuro. La idea es que los astrónomos solo describían los movimientos celestes, pero Newton encontró las leyes que explicaban esos movimientos y eso le permitía predecir cómo evolucionarían.

El concepto que nos ocupa, la Teoría de Juegos, en la actualidad abarca numerosos campos y se desarrolla a través de diversas disciplinas entre las que destacan la biología, sociología, politología, psicología, filosofía, economía y ciencias de la computación.

Estructura del trabajo

El siguiente cuadro resume la estructura del trabajo mostrando el itinerario a seguir para el correcto entendimiento de este.



Índice de figuras

3.1. Grafo bipartito juego asimétrico 33
3.2. Mejor respuesta guerra de sexos 36
3.3. Comportamientos sociales 47

4.1. Juego extensivo 1 51
4.2. Juego extensivo 2 51
4.3. Juego del conductor olvidadizo. 52
4.4. Juego extensivo 3 54
4.5. Juego extensivo 4 56
4.6. Juego extensivo 5 57
4.7. Equilibrio en juegos dinámicos 59
4.8. Juego de las monedas 60
4.9. Juego extensivo 6 60
4.10. Juego extensivo 7 62
4.11. Juego del ciempiés. 63
4.12. Juego extensivo 8 65

5.1. Módulo juego *VNM-Póker* 68
5.2. *VNM-Póker(2,4,2,3)*. 69
5.3. Foto de John Von Neumann (derecha) y Oskar Morgenstern (izquierda). . 73

6.1. 1ª ronda elegir un número 76
6.2. 2ª ronda elegir un número 76
6.3. Visualización de las diferencias entre juegos repetidos y estocásticos 88

Índice de cuadros

3.1. Juego suma cero 26
3.2. Juego de monedas 27
3.3. Lado de la carretera 27
3.4. Guerra de sexos 27
3.5. Legisladores 28
3.6. Juego asimétrico 32
3.7. Legisladores 33
3.8. Juego simétrico 34
3.9. Dilema del prisionero 34
3.10. Probabilidades estrategias mixtas 35
3.11. Primera iteración estrategias dominadas 40
3.12. Segunda iteración estrategias dominadas 40
3.13. Juego sin estrategias dominadas 40
3.14. Juego equilibrio correlacionado 43
3.15. Juego del halcón y la paloma 45

4.1. Forma normal juego extensivo 1 56
4.2. Forma normal juego extensivo 2 56
4.3. Forma normal juego extensivo 4 57
4.4. Forma normal juego extensivo 5 58
4.5. Juego dinámico de tres personas 58
4.6. Forma normal juego extensivo 7 62

5.1. Forma normal *VNM-Póker(2,r,m,n).* 70
5.2. Forma normal reducida *VNM-Póker(2,r,m,n).* 71

6.1. Dilema prisionero repetido 79
6.2. Módulo juego de monedas 80
6.3. Algortimo del juego ficticio en el juego de las monedas. 81

7.1. Forma normal juego examen 90

Para ser bueno en cualquier cosa, debes saber cómo aplicar los principios básicos. Para ser el mejor, debes saber cuándo violar esos principios.

Garry Kasparov

1
Definición

Los conflictos entre seres racionales que recelan uno del otro, o la pugna entre competidores que interactúan y se influyen mutuamente, que piensan y que incluso pueden ser capaces de traicionarse uno al otro, constituyen el campo de estudio de la teoría de juegos, la cual se basa en un análisis matemático riguroso pero que, sin embargo, surge de manera natural al observar y analizar un conflicto desde un punto de vista racional.

Definición 1.0.1 La **teoría de juegos** se puede definir como el estudio de modelos matemáticos de conflicto y cooperación entre decisores racionales [1].

Desde el enfoque de esta teoría, un *juego* es una situación conflictiva en la que priman intereses contrapuestos de individuos o instituciones. En este contexto, una parte al tomar una decisión influye sobre la decisión que tomará la otra; así, el resultado del conflicto se determina a partir de las decisiones tomadas por los actuantes. La **teoría de juegos** plantea que debe haber una forma racional de jugar a cualquier *juego* (o de negociar un conflicto), especialmente en el caso de haber muchas situaciones engañosas y segundas intenciones [2].

Básicamente, cualquier modelo de teoría de juegos debe definir: **jugadores** y **reglas**.

- **Jugadores:** agentes racionales que participan en el juego.
- **Reglas:** conjunto de normas que rigen el juego. Aquí se especifican:
    - **Acciones o alternativas:** son las diversas elecciones que posee el jugador en cada jugada.
    - **Conjunto de información:** información que los jugadores tienen sobre acciones anteriores cuando juegan.
    - **Estrategia:** acción o conjunto de movimientos que un jugador puede elegir de un conjunto de posibles acciones en cada situación del juego.

- **Utilidad o pago:** La retribución que recibe un jugador por jugar una determinada estrategia.

Los jugadores seleccionan la estrategia óptima con respecto a la utilidad como resultado del juego. Cualquier jugador sabe que otros jugadores son racionales, y sabe que cualquier otro jugador asume que cada jugador es racional, a esta consideración se le llama *conocimiento común*.

Para poder fundamentar el estudio de las estrategias se asume un supuesto básico: en un conflicto los contendientes son **racionales** e **inteligentes**. El estudio clásico de los juegos parte de la hipótesis de racionalidad de los jugadores, búsqueda del máximo beneficio. Este texto analizará la teoría de juegos bajo esta suposición. Además, se supone que ambos jugadores eligen sus estrategias solo para promover su propio bienestar, sus propios intereses (no hay compasión con el oponente). El supuesto de inteligencia manifiesta que todos los jugadores conocen la información necesaria para el desarrollo del juego, que no significa que los jugadores dispongan de toda la información relevante al juego (se verá en los siguiente capítulos). Por último, la teoría de juegos no reconoce la posibilidad de hacer trampas, se debe jugar para ganar siguiendo las reglas.

Estrategias

Una estrategia es la planificación que sigue un jugador para elegir entre sus posibles alternativas a partir de un conjunto de información. Es una regla predeterminada que especifica por completo cómo se intenta responder a cada posible circunstancia en cada etapa del juego.

El concepto de estrategia se confunde en ocasiones erróneamente con el de movimiento o acción. Un movimiento es una elección de un jugador en un determinado momento en el juego. Una estrategia es una secuencia de movimientos que un jugador elige jugar dada una situación del juego. A diferencia de la acción, la estrategia es mental, no es observable por los demás jugadores.

En un principio, se distinguen dos tipos principales de estrategias:

- **Estrategia pura:** son aquellas en las que no interviene la probabilidad, sino que las elecciones son libres del jugador.
- **Estrategia mixta:** son aquellas en las que interviene la probabilidad.

O Se tiene estrategias puras $\subset$ estrategias mixtas

Concepto de utilidad

El comportamiento de cualquier decisor racional debe poder describirse a través de una función de utilidad, que da una caracterización cuantitativa de sus preferencias ante los resultados, y una distribución de probabilidad subjetiva, que caracteriza sus creencias sobre todos los factores desconocidos relevantes. Además, cuando el decisor dispone de nueva información, sus probabilidades subjetivas deben revisadas concordes a la fórmula de Bayes [1][*pág* 5].

Definición 1.0.2 — Función de pago o utilidad.

Sea $A = \{A_1, ..., A_N\}$ el conjunto de todas las posibles estrategias, se define la **función de pago o utilidad** $u_i : A \to \mathbb{R}$ para el jugador i como la función que refleja la utilidad obtenida por el jugador i-ésimo cuando cada jugador he elegido su estrategia.

También se puede considerar como utilidad esperada, utilizando el mismo nombre indistintamente, dependiendo si interviene el azar o no. Aunque parezca obvia, la existencia de esta función de utilidad no es trivial. John von Neumann y Oskar Morgenstern demostraron que cualquier individuo cuyas preferencias satisfacen cuatro axiomas tiene una función de utilidad.

Definición 1.0.3 — Axiomas de racionalidad. *(notación teoría de juegos)*

Sean A,B y C acciones. Sea $A \prec B$ la relación *preferir* A *sobre* B, o equivalentemente $A \succ B$, y sea $A \sim B$ la relación *indiferentes* A *y* B. Se dice que un individuo es **VNM-racional** si cumple los siguientes axiomas:

1. **Axioma de completitud:** Para A y B acciones, se tiene exactemente una de las siguientes: $A \prec B$, $A \succ B$ ó $A \sim B$.
2. **Axioma de transitividad:** Si $A \prec B$ y $B \prec C$ entonces $A \prec C$. Idem $\succ$ y $\sim$.
3. **Axioma de continuidad:** Si $A \prec B \prec C$ entonces existe una probabilidad $p \in [0, 1]$ tal que: $pA + (1-p)C \sim B$.

   (Este axioma es equivalente a la propiedad Arquimediana)
4. **Axima de independencia:** Para alguna C y $p \in (0, 1]$,

$$A \prec B \iff pA + (1-p)C \prec pB + (1-p)C.$$

Teorema 1.0.1 — Teorema de utilidad de Von Neumann–Morgenstern.

Para cualquier **agente VNM-racional** existe una función u, llamada **función de utilidad VNM**, tal que para dos acciones cualesquiera A, B se tiene:

$$A \prec B \quad \Longleftrightarrow \quad E[u(A)] < E[u(B)],$$

donde,

$$E[u(A)] = E[u(p_1 A_1 + ... + p_n A_n)] = p_1 u(A_1) + ... + p_n u(A_n).$$

El Teorema de utilidad Von Neumann–Morgenstern (VNM) muestra que, bajo ciertos axiomas de comportamiento racional, un decisor que se enfrenta a una toma de decisiones bajo riesgo (probabilísticos) se comportará como si estuviera maximizando el valor esperado de alguna función de utilidad. Esta función se conoce como la función de utilidad Von Neumann-Morgenstern. De esta forma, la hipótesis de racionalidad se entiende postulando que los jugadores buscarán maximizar su función de utilidad.

Equilibrio de Nash

Se dice el jugador jugó bien, empleó una estrategia óptima, si no puede obtener un mayor valor eligiendo una estrategia diferente (dado que los otros jugadores se adhieren a sus estrategias anteriores).

Si todos los jugadores quieren jugar lo mejor posible, todos los jugadores quieren elegir una buena estrategia. Si existe una solución para la cual ningún jugador puede mejorar eligiendo una estrategia diferente, todos los jugadores podrían "estar de acuerdo" con esta solución. Esta solución puede o no existir, pero si hay una, generalmente se conoce como el estado estacionario o el **equilibrio de Nash**.

El Capítulo 2 describe la teoría de elección racional más exigente de todas, la ***teoría de juegos****, desarrollada por un genio y supone que otras personas son genios.*

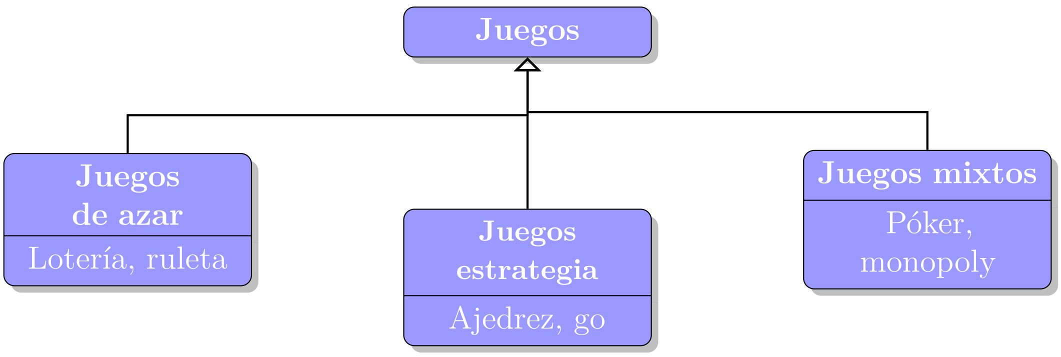
The Logic Of Life. Tim Harford

2

Clasificación

Existente una extensa literatura sobre la clasificación de los distintos juegos. En muchas ocasiones los autores no han unificado todavía las diversas nomenclaturas existentes y los contenidos de estas pueden solaparse [3]. Además, los juegos se pueden clasificar atendiendo a múltiples criterios no excluyentes entre ellos.

Clasificación general



Tipos de juegos

- **Juegos según el número de jugadores.**

Atendiendo al número de jugadores se disitinguen juegos **bipersonales**, si participan 2 jugadores, y juegos **n-personales**, cuando participan más de 2. Los juegos en los que sólo intervienen un decisor son objeto de la *Teoría de la Decisión*.

[0]Los ejemplos que se presentan en este capítulo (*juego del halcón-paloma*, *dilema del prisionero*, etc.) se desarrollarán en los capítulos sucesivos.

- **Juegos cooperativos (coalicionales) y no cooperativos.**

Un juego se dice **cooperativo**, aunque es mejor emplear la denominación **coalicional**, cuando los jugadores no compiten sino que colaboran para conseguir el mismo objetivo y por lo tanto ganan o pierden en conjunto. En otras palabras, es un juego donde grupos de jugadores (*coaliciones*) pueden tomar comportamientos cooperativos, pues el juego es una competición entre coaliciones de jugadores y no entre jugadores individuales. La teoría de juegos cooperativos se centra en predecir qué coaliciones se formarán, las acciones conjuntas que los grupos toman y los resultados colectivos resultantes.

Los juegos **no cooperativos** son de carácter más general, los jugadores deciden de forma independiente compitiendo entre ellos. La teoría de juegos no cooperativos se enfoca en predecir las acciones y ganancias de los jugadores individuales y analizar los equilibrios de Nash.

Como la teoría de juegos no cooperativos es más general, los juegos cooperativos pueden analizarse mediante el enfoque de la teoría de juegos no cooperativos (pero no al revés, véase [4]) siempre que se hagan suposiciones suficientes para abarcar todas las posibles estrategias disponibles para los jugadores dada a la posibilidad de aplicación externa de la cooperación.

- **Juegos simultáneos y secuenciales**

Un juego **simultáneo**, **estratégico**, **estático** o **de etapas** es aquel en el que los jugadores toman decisiones, eligen sus estrategias, sin conocer las decisiones que otros jugadores han elegido, así como si las decisiones se tomasen de forma simultánea.

Los juegos **dinámicos** o **secuenciales** son juegos en los que los jugadores posteriores tienen algún conocimiento de las acciones previas. Este conocimiento no tiene porque ser perfecto, solo debe consistir en algo de información.

Los juegos simultáneos se representan mediante la forma normal y se resuelven utilizando el concepto de equilibrio de Nash, mientras que los juegos secuenciales se representan en forma extensa y se resuelven usando el concepto de reversión o equilibrio perfecto en subjuegos. Es por ello que hay autores que denominan a los juegos estáticos como juegos en forma normal y los dinámicos en forma extensiva. Otros también emplean la denominación de juegos estratégicos para los juegos estáticos.

Juegos de información perfecta e imperfecta: Un juego **dinámico** es de **información perfecta** si en el turno de cada jugador este conoce todas las acciones de los jugadores previos. Asimisno, se dice de **información imperfecta** si un jugador no sabe exactamente qué acciones tomaron otros jugadores hasta ese punto.

O

Si ningún jugador observa los movimientos de los jugadores anteriores, entonces el juego es simultáneo. Si cada jugador observa los movimientos de cualquier otro jugador que haya ido antes que él, el juego es de información perfecta. Si algunos (pero no todos) los jugadores observan movimientos anteriores, mientras que otros se mueven simultáneamente, el juego se considera de información imperfecta [5].

■ **Ejemplo 2.1** El *juego de piedra, papel y tijeras* es un ejemplo de juego simultáneo. El *ajedrez* o una *subasta* son ejemplos de juegos dinámicos de información perfecta, mientras que el *póker* es un juego dinámico de información imperfecta. ■

- **Juegos de información completa e incompleta**

En los juegos de **información completa** cada jugador tiene la misma información relevante al juego que los demás jugadores, conoce las recompensas y estrategias disponibles para los demás. Esto es mucho más que simplemente decir que algo es conocido por todos, sino que también implica el hecho de que sea conocido que también es conocido por todos. La información completa se refiere al estado de conocimiento sobre la estructura del juego, no necesariamente al conocimiento del devenir del juego.

■ **Ejemplo 2.2** Un ejemplo de juego de información completa se considera cuando varias empresas piden la concesión de un *concurso público*, el emisor proporciona toda la información relevante al concurso y las empresas que cumplan los requisitos compiten para lograr la adjudicación.

Por otra parte, un ejemplo de juego de información incompleta es la conocida como *subasta Vickrey*, un tipo de subasta de puja sellada, donde los oferentes presentan ofertas por escrito sin conocer la oferta de las otras personas en la subasta, y en la que gana el postor más alto, pero el precio que paga este es la segunda oferta más alta. Al no conocer la función de recompensa del juego no tenemos toda la información relevante a la estructura de este.

Es más difícil encontrar ejemplos de información perfecta pero incompleta. Supóngase que se está jugando una partida de ajedrez contra un oponente que recibirá una cantidad de dinero si se da una situación particular, pero no conocemos qué situación es esa. En este caso tenemos información perfecta, pues conocemos todos los movimientos del adversario. Sin embargo, al no conocer la función de recompensas del otro jugador, estamos ante un juego de información incompleta. ■

Juego bayesiano.

A un juego **simultáneo** con información incompleta se le conoce como juego **bayesiano**. Intuitivamente, si es mi turno de moverme, puede que no sepa qué han hecho hasta ahora todos los demás jugadores. Por lo tanto, tengo que inferir de sus acciones probables y obtener de la regla de Bayes qué acciones probablemente llevarán a mi decisión final.

- **Juegos de suma constante, suma cero o suma positiva.**

Un juego es de **suma constante** si la suma de los beneficios de todos los jugadores es constante. Dado que los pagos siempre se pueden normalizar, los juegos de suma constante son equivalentes a los juegos de **suma cero**. En los juegos de suma cero el beneficio total para todos los jugadores del juego siempre suma cero, un jugador se beneficia solamente a expensas de otros, se gana exactamente la cantidad que pierden los oponentes.

La mayoría de los ejemplos reales son juegos de **suma distinta de cero**, **suma positiva** o **suma no nula**, porque algunos desenlaces tienen resultados netos mayores o menores que cero. Es decir, la ganancia de un jugador no necesariamente se corresponde con la pérdida de otro. Cualquier juego se puede transformar en un juego de suma cero añadiendo un jugador *ficticio* adicional cuyas pérdidas compensen las ganancias netas de los jugadores.

■ **Ejemplo 2.3** El *ajedrez* o el *póker* son ejemplos de juegos de suma cero. El conocido como *dilema del prisionero* es un juego de suma no nula. ■

- **Juegos simétricos y asimétricos.**

Un juego **simétrico** es un juego donde las recompensas por jugar una estrategia en particular dependen solo de las otras estrategias empleadas, no de quién las está jugando. Un juego es simétrico si los pagos de un jugador pueden expresarse como una transposición de los pagos del otro jugador.

Los juegos **asimétricos** son aquellos en los que las estrategias adoptadas por los jugadores son diferentes. En los juegos asimétricos, la estrategia que brinda beneficios a un jugador puede no ser igualmente beneficiosa para el otro jugador.

■ **Ejemplo 2.4** La mayoría de los juegos suelen ser asimétricos, aunque muchos de los juegos bipersonales que se estudian habitualmente son al menos ordinalmente simétricos. Las representaciones estándar del *juego de la gallina*, también conocido como el *juego del halcón y la paloma*, y el *dilema del prisionero* son todos simétricos. ■

- **Juegos discretos y continuos**

La mayoría de los juegos que se tratan son juegos **discretos** donde los jugadores eligen entre un conjunto finito de estrategias. El concepto de juegos **continuos** extiende la noción de un juego discreto, permitiendo que los juegos incluyan conjuntos más generales de estrategias, que pueden ser infinitamente innumerables. La clase de juegos continuos generalmente se define y estudia como un subconjunto de la clase más grande de juegos infinitos (juegos con conjuntos de estrategias infinitas) en los que los conjuntos de estrategias son compactos y las funciones de utilidad continuas. Los juegos **diferenciales** son juegos continuos donde la evolución de las variables de estado de los jugadores se rige por ecuaciones diferenciales.

■ **Ejemplo 2.5** El *modelo de competencia de Cournot* es un modelo económico usado para describir una estructura de industrias en la que las compañías compiten en las cantidades que van a producir es un ejemplo de juego continuo. ■

- **Juegos de longitud finita e infinita**

Los juegos estudiados finalizan generalmente tras un número finito de movimientos. Los juegos matemáticos puros no tienen esta restricción. La teoría de conjuntos estudia juegos de **infinitos movimientos**, donde el ganador no se conoce hasta que todos los movimientos se conozcan. El interés en dicha situación no suele ser decidir cuál es la mejor manera de jugar a un juego, sino simplemente qué jugador tiene una estrategia ganadora, que se puede probar usando el *axioma de elección*, *axioma de determinación*, etc.

- **Juegos repetidos**

Cuando los jugadores interactúan jugando un juego de escenario similar un cierto número de veces (llamado *juego base* o *juego de etapa*), siendo los resultados de cada etapa observados antes de la siguiente, se dice que el **juego repetido, iterado o superjuego**. A diferencia de un juego jugado una vez, un juego repetido permite que una estrategia dependa de movimientos pasados, lo que permite efectos de reputación y retribución [5]. Los juegos repetidos pueden dividirse en dos clases dependiendo de si se repite de forma **finita** o **infinita**. Los resultados en estos dos casos son muy diferentes.

O No se debe confundir el concepto de *juego infinito*, que se refiere al conjunto de estrategias, con el concepto de *juego de longitud infinita*, que se refiere a la duración de este, o con el de *juego repetido infinitamente*, que hace referencia al número de veces que se juega el mismo juego.

Juegos estocásticos.

Intuitivamente hablando, un juego **estocástico** modela situaciones en las que, en lugar de un juego hay una colección de juegos (*estado*) y los jugadores juegan repetidamente juegos de esta colección. La transición de un juego actual a otro depende probabilísticamente de las acciones tomadas en el juego actual. El juego se desarrolla en una secuencia de etapas. Al comienzo de cada etapa del juego se está en algún estado. Los jugadores eligen acciones y cada jugador recibe un pago que depende del estado actual y las acciones elegidas.

El juego se mueve a un nuevo estado aleatoriamente cuya distribución depende del estado previo y las acciones elegidas por los jugadores. El procedimiento se repite en el nuevo estado y el juego continúa por un número finito o infinito de etapas. El pago total a un jugador se toma a menudo como la suma descontada de los pagos etapa por etapa o el límite inferior de los promedios de las rentabilidades de cada etapa.

Ejemplo 2.6 Un ejemplo de juego estocástico es un *torneo de póker* donde participan varios jugadores. ■

La formalización del *torneo de póker* como juego estocástico puede encontrarse en [6]. Los juegos estocásticos generalizan los *procesos de decisión de Markov* y los *juegos repetidos*.

- **Juegos combinatorios**

Los juegos en los que la dificultad de encontrar una estrategia óptima proviene de la multiplicidad de movimientos posibles se denominan juegos **combinatorios**. No hay una teoría unificada que se ocupa de los elementos combinatorios en los juegos. Hay, sin embargo, herramientas matemáticas que pueden resolver problemas particulares y responder a preguntas generales.

Ejemplo 2.7 Algunos ejemplos de estos juegos pueden ser *ajedrez* y *go*. Los juegos que implican información imperfecta o incompleta también pueden tener un fuerte carácter combinatorio, por ejemplo el *backgammon*. ■

- **Metajuegos**

Los **metajuegos** son juegos en los que se trata de desarrollar las reglas para otro juego, el objetivo o el jugador. Los metajuegos buscan maximizar el valor de utilidad del conjunto de reglas desarrollado.

El supremo arte de la guerra es someter al enemigo sin luchar.

Sun Tzu

3 Juegos estratégicos

Definición 3.0.1 — Juego estratégico.

Un **juego estratégico** o **estático** se define formalmente como la terna $\Gamma = \langle N, A, u \rangle$ donde:

- $N = \{1, .., n\}$ conjunto no vacío de los n **jugadores**.
- $A = A_1 \times ... \times A_n = \times_{i \in N} A_i$ conjunto de todas las posibles **acciones**.

Cada A_i representa el conjunto de acciones disponibles para el jugador i-ésimo. Sea $a = (a_1, ..., a_n) \in A$ representa una combinación de las posibles acciones del juego, conocido como un perfil de acciones (*action profile*).

- $u = (u_1, .., u_n)$ es el perfil de **funciones de utilidad**.

Cada $u_i : A \longrightarrow \mathbb{R}$ representa la función de utilidad esperada del i-ésimo jugador si se da la combinación de acciones $a \in A$. (*profile of utility functions*)

Este modelo no tiene en cuenta el orden en el que los jugadores mueven, los jugadores eligen sus estrategias de forma simultánea. Se suele suponer que N es un conjunto finito.

Forma normal de un juego estratégico

También conocida como **forma matricial** o **forma estratégica**, recoge que pagos se reciben en función de las diferentes estrategias. La forma normal supone que los jugadores mueven simultáneamente, motivo por el cuál será la forma en la que representaremos los juegos estratégicos.

Representación de un juego bipersonal

Las filas de la matriz representan las estrategias del jugador 1, las columnas representan las estrategias del jugador 2. Las celdas recogen la utilidad o pago para cada jugador según la estrategia, primero la del jugador 1 seguida de la del jugador 2.

- **Juegos de pura competencia.** Juegos de la forma $\Gamma = \langle \{1, 2\}, (A_i), (u_i) \rangle$ donde los jugadores tienen intereses exactamente opuestos, es decir, $\forall a \in A$, $u_1(a) + u_2(a) = c$ para alguna constante c.

Los juegos de suma cero son un caso especial de esta clase. En general, un juego es de suma cero cuando:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i(a) = 0 \quad \forall a \in A,$$

La forma normal de un juego bipersonal de suma cero, con dos alternativas por jugador no necesariamente iguales, se puede simplificar almacenando la función de utilidad para un jugador, ya que el otro jugador recibe el pago opuesto.

Tabla 3.1: Juego suma cero

	E1	E2
E'1	a,-a	-c,c
E'2	-b,b	d,-d

	E1	E2
E'1	a	-c
E'2	-b	d

Ejemplo 3.1 — Juego de monedas.

Se juega entre dos jugadores, Él y Ella. Cada jugador tiene una moneda y en secreto elige si colocar la moneda en *cara* o *cruz*. Los jugadores luego revelan sus elecciones simultáneamente.

- Si las monedas coinciden (ambas *caras* o ambas *cruz*), Él gana ambas monedas, por lo que gana uno de Ella (+1 para Él, -1 para Ella).
- Si las monedas no coinciden (una *cara* y una *cruz*), Ella gana ambas monedas, por lo que recibe uno de Él (-1 para Él, +1 para Ella).

Formalización del juego de las monedas[1]:

- Jugadores: $N = \{\acute{E}l = 1, Ella = 2\}$
- Conjunto de estrategias para el jugador i: $A_i = \{cara, cruz\}$
- Función de utilidad:

$$\begin{aligned} u_1(cara, cara) &= 1 & u_2(cara, cara) &= -1 \\ u_1(cara, cruz) &= -1 & u_2(cara, cruz) &= 1 \\ u_1(cruz, cara) &= -1 & u_2(cruz, cara) &= 1 \\ u_1(cruz, cruz) &= 1 & u_2(cruz, cruz) &= -1 \end{aligned}$$

[1] No se formalizarán todos los juegos, sólo los más relevantes o que más se emplearán a lo largo del texto. En general basta con mostrar la forma normal para dar un juego.

Tabla 3.2: Juego de monedas

	Cara	Cruz
Cara	1,-1	-1,1
Cruz	-1,1	1,-1

- **Juegos de cooperación.** Juegos donde los jugadores tiene exactamente los mismos intereses, no hay conflicto, es decir, $\forall a \in A \quad \forall i, j,\ u_i(a) = u_j(a)$. Estos juegos también se pueden simplificar usando un pago único por celda.

Ejemplo 3.2 — Lado de la carretera.

Dos personas conducen por una misma carretera. Cada conductor puede elegir conducir por un lado de la carretera, izquierda o derecha, si eligen el mismo lado se evita colisionar, si eligen lados distintos colisionarán.

Tabla 3.3: Lado de la carretera

	Izquierda	Derecha
Izquierda	1	0
Derecha	0	1

- **Juegos generales.** Combinan los juegos de pura competencia y cooperación.

Ejemplo 3.3 — Guerra de sexos.

Una pareja decide ir al cine. Emiten dos películas A y B. Ambos quieren ver la misma película pero cada uno tiene una preferencia distinta.

Tabla 3.4: Guerra de sexos

	Película A	Película B
Película A	2,1	0,0
Película B	0,0	1,2

Representación de un juego de tres o más personas

Si tenemos más de dos jugadores, necesitamos otra forma sistemática de generar las n celdas necesarias en las que escribimos los pagos para los jugadores.

A continuación se presenta un ejemplo que muestra un procedimiento extraído de [7].

■ **Ejemplo 3.4 — Voto de los legisladores.**

Tres legisladores votan si se permiten un aumento salarial de 2000€ por año. Dado que los votantes están observando dicha votación, hay una pérdida de prestigio muy cara si el legislador vota a favor de un aumento. Supongamos que los legisladores estiman la pérdida de prestigio en 1000€ por año. ¿Qué pasa si los tres votan al mismo tiempo?

■

Tabla 3.5: Legisladores

	C vota subir	C vota bajar
A vota subir		
B vota subir	1, 1, 1	1, 1, 2
B vota subir	1, 2, 1	-1, 0, 0
A vota bajar		
B vota bajar	2, 1, 1	0, -1, 0
B vota bajar	0, 0, -1	0, 0, 0

No todos los juegos pueden representarse fácilmente en forma normal.

■ **Ejemplo 3.5 — Revolución.**

Supongamos que una población de 1000 habitantes decide si revolverse contra el Estado o no. La revuelta habrá sido un éxito si y solo si el número de personas que participen es mayor de 200. En caso de salir mal, a los que participen en la revuelta se les castigará.

■

Formalización juego *Revolución*:

- Jugadores: $N = \{1, ..., 1000\}$
- Conjunto de estrategias para el jugador i: $A_i = \{Participar, No\ \ participar\}$
- Función de utilidad para el jugador i:
  - $u_i(a) = \quad 1$ si $\#\{j : a_j = Participar\} \geq 200$
  - $u_i(a) = -1$ si $\#\{j : a_j = Participar\} < 200$ y $a_i = Participar$
  - $u_i(a) = \quad 0$ si $\#\{j : a_j = Participar\} < 200$ y $a_i = No\ \ participar$

Estrategias

Permitimos que las elecciones de los jugadores sean no deterministas y, por lo tanto, necesitamos agregar unas probabilidades que expresen la relación de preferencia de cada jugador sobre las acciones.

Sea $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estratégico, se denota por $\Delta(A_i)$ el conjunto de las distribuciones de probabilidad sobre A_i. Un elemento de $\Delta(A_i)$ se denomina **estrategia mixta** del jugador $i \in N$. Suponemos que las estrategias mixtas de los jugadores son aleatorizaciones independientes. Consideramos los elemetos de A_i como **estrategias puras** del jugador i-ésimo.

Un perfil de estrategias mixtas o aleatorias $\alpha = (\alpha_j)_{j \in N}$ induce una distribución de probabilidad sobre $A = \times_{i \in N} A_i$. Sea $\alpha \in \Delta(A) = \times_{i \in N} \Delta(A_i)$, para cada jugador i y cada estrategia pura $a_i \in A_i$, α representa la probabilidad de que el jugador i elija la alternativa a_i cumpliéndose por lo tanto que $\sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) = 1, \ \forall i \in N$.

Las estrategias puras son un caso particular de las mixtas, ya que la primera estrategia pura se podría formular como $(1, 0, ..., 0)$, jugar con probabilidad 1 la primera acción y así sucesivamente.

Definición 3.0.2 — Extensión mixta de un juego estratégico.

Se denomina extensión mixta de un juego estratégico $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ a $\langle N, (\Delta(A_i)), (U_i) \rangle$ donde $\Delta(A_i)$ es el conjunto de las distribuciones de probabilidad sobre A_i y $U_i : \times_{j \in N} \Delta(A_j) \to \mathbb{R}$ asigna a cada $\alpha \in \times_{j \in N} \Delta(A_j)$ el valor esperado bajo la función de utilidad u_i.

N La función de utilidad esperada para el jugador i se puede notar indistintamente como $U_i(\alpha)$ o $u_i(\alpha)$ con $\alpha \in \Delta(A)$, distinguiéndose de $u_i(a)$ para $a \in A$ perfil de acciones.

Proposición 3.0.1 Dado A finito, sea $a = (a_j)_{j \in N}$ un perfil de acciones, su probabilidad dado el perfil $\alpha = (\alpha_j)_{j \in N}$ es $\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j)$, así la evaluación de α por el jugador $i \in N$ es

$$u_i(\alpha) = \sum_{a \in A} (\prod_{j \in N} \alpha_j(a_j)) u_i(a). \tag{3.1}$$

Sea $\alpha \in \Delta(A)$ un perfil estratégico del juego Γ, notamos $\alpha_{-i} = (\alpha_1, ..., \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_n)$ que muestra las estrategias de todos los jugadores menos el i-ésimo. Por lo que tendremos que $\alpha = (\alpha_{-i}, \alpha_i)$. Para cualquier τ_i in $\Delta(A_i)$, se nota (α_{-i}, τ_i) al perfil estratégico en el que la i-ésima componente es τ_i y el resto vienen dadas por α, se tiene entonces

$$u_i(\alpha_{-i}, \tau_i) = \sum_{a \in A} (\prod_{j \in N - i} \alpha_j(a_j)) \tau_i(a_i) u_i(a).$$

Nótese que para cualquier perfil estratégico α, cualesquiera estrategias mixtas β_i y γ_i del jugador i y $\lambda \in [0,1]$ se tiene

$$u_i(\alpha_{-i}, \lambda\beta_i + (1-\lambda)\gamma_i) = \lambda u_i(\alpha_{-i}, \beta_i) + (1-\lambda)u_i(\alpha_{-i}, \gamma_i). \tag{3.2}$$

Nótese también que cuando cada A_i es finito se tiene para cualquier perfil mixto α que

$$u_i(\alpha) = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) u_i(\alpha_{-i}, [a_i]),$$

donde $[a_i]$ es la estrategia mixta degenerada del jugador i que asigna probabilidad 1 a $a_i \in A_i$.

De esta forma, usando notación algebraica, se observa que $\alpha_i = \sum_{a_i \in A_i} \alpha_i(a_i) \cdot [a_i]$.

Si el jugador i usa la estrategia pura d_i mientras que el resto de jugadores se comportan de forma independiente según el perfil α, entonces la utilidad esperada para el jugador i-ésimo será

$$u_i(\alpha_{-i}, [d_i]) = \sum_{a_{-i} \in A_{-i}} (\prod_{j \in N-i} \alpha_j(a_j)) u_i(a_{-i}, d_i),$$

donde $A_{-i} = \times_{j \in N-i} A_j$.

Optimalidad de Pareto

Desde el punto de vista de un *observador exterior* algunos resultados, pagos, utilidad, etc. se pueden considerar mejores que otros.

A veces un resultado o es al menos tan bueno para cada agente como otro o' y existe un agente que prefiere estrictamente o a o'. En este caso parece razonable decir que o es mejor que o'. Se dice entonces que o **domina en el sentido de Pareto** a o'.

■ **Ejemplo 3.6** Sea $o = (7,8)$ y $o' = (7,2)$ se tiene que o domina en el sentido de pareto a o' ya que $7 = 7$, para el jugador 1 es indiferente y $8 > 2$, para el jugador 2 es estrictamente mejor. ■

Definición 3.0.3 — Optimalidad de Pareto.

Un resultado o^* es un **óptimo de Pareto** si no existe ningún otro resultado que lo domine en el sentido de Pareto.

Un juego puede tener más de un óptimo de Pareto. Todo juego tiene que tener al menos un óptimo de Pareto.

Revisando los ejemplos anteriores, en el *juego de las monedas* 3.1 todos los resultados se pueden considerar óptimos de pareto debido a que no existe ningún resultado que todo el mundo prefiera por igual. En general, en todo juego de suma cero todo resultado es un óptimo de Pareto. En el *lado de la carretera* 3.2 se tiene que existen dos óptimos de Pareto: $(Derecha, Derecha)$ e $(Izquierda, Izquierda)$. Y por último en la *guerra de sexos* 3.3 también encontramos dos óptimos de pareto: $(Película\ A, Película\ A)$ y $(Película\ B, Película\ B)$.

Equilibrio de Nash

Dado un juego Γ, supongamos que nuestros conocimientos están bien fundamentados y que todos los jugadores son lo suficientemente inteligentes como para compartir estos conocimientos. Entonces cada jugador quiere elegir la estrategia pura que maximice su utilidad y debería de haber cero probabilidad de que eligiese otras estrategias que no le lleve a alcanzar el máximo, es decir

$$\text{si} \quad \alpha_i(a_i) > 0, \quad \text{entonces} \quad a_i \in argmax_{d_i \in A_i} u_i(\alpha_{-i}, [d_i]). \tag{3.3}$$

Un perfil estratégico mixto α es un **equilibrio de Nash** de Γ si y solo si satisface (3.3) para todo jugador $i \in N$ y para todo $a_i \in A_i$.

Del mismo modo se tendrá que un perfil estratégico mixto α es un **equilibrio de Nash**, a veces notado EN, si y solo si ningún jugador puede incrementar su utilidad al desviarse uniteralmente de la predicción del perfil de estrategia aleatoria. Esto es, α es un equilibrio de Nash de Γ si y solo si

$$u_i(\alpha) \geq u_i(\alpha_{-i}, \tau_i), \quad \forall i \in N, \forall \tau_i \in \Delta(A_i). \tag{3.4}$$

Se tiene que (3.3) y (3.4) son equivalentes, ver [1]. Estos resultados se resumen con ayuda de la noción de **mejor respuesta**.

Definición 3.0.4 — Mejor respuesta *(best response)*.

Sea $\alpha = (\alpha_{-i}, \alpha_i) \in \Delta(A)$ un posible perfil estratégico del juego Γ,

$$\alpha_i^* \in BR(\alpha_{-i}) \iff \forall \alpha_i \in \Delta(A_i),\ u_i(\alpha_{-i}, \alpha_i^*) \geq u_i(\alpha_{-i}, \alpha_i).$$

Teorema 3.0.2 — Equilibrio de Nash *(EN)*.

Sea $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estratégico finito, $\alpha^* = (\alpha_1^*, ..., \alpha_n^*) \in \times_{i \in N} \Delta(A_i)$ es un Equilibrio de Nash $\iff \forall i, \alpha_i \in BR(\alpha_{-i})$.

Existencia del equilibrio de Nash.

Un resultado de existencia tiene dos propósitos. Primero, si tenemos un juego que satisface la hipótesis del resultado sabemos que hay alguna esperanza de que nuestros esfuerzos por encontrar un equilibrio tengan éxito. Segundo, y más importante, la existencia de un equilibrio muestra que el juego es consistente, tiene una solución.

Teorema 3.0.3 — Existencia equilibrio de Nash.

Todo **juego estratégico finito** Γ tiene un equilibrio de Nash en $\times_{i\in N}\Delta(A_i)$.

Se necesita recurrir a las estrategias mixtas porque no todos los juegos tienen un equilibrio de Nash para estrategias puras, por ejemplo el *juego de las monedas* 3.1. Las demostraciones de los teoremas expuestos se pueden consultar en [8].

Equilibrio de Nash puro

Demos un ejemplo de juego asimétrico.

■ **Ejemplo 3.7 — Juego asimétrico.**

Supongamos que Él tiene cuatro movimientos, A_1, A_2, A_3, A_4 y Ella tiene tres B_1, B_2 y B_3. La matriz de pago de este juego de dos personas, que no es de suma cero, se presenta a continuación.

■

Tabla 3.6: Juego asimétrico

	B_1	B_2	B_3
A_1	1,$\underline{3}$	2,2	1,2
A_2	$\underline{2}$,$\underline{3}$	2,$\underline{3}$	2,1
A_3	1,1	1,$\underline{2}$	$\underline{3}$,$\underline{2}$
A_4	1,2	$\underline{3}$,1	2,$\underline{3}$

Encontramos la mejor respuesta de Ella al movimiento A_1 de Él al encontrar el valor más grande en la primera fila para su pago representados en los segundos valores de cada casilla, en este caso B_1 que está subrayado. De la misma manera concluimos que las mejores respuestas de Ella al movimiento A_2 de Él son los movimientos B_1 y B_2, las mejores respuestas de Ella al movimiento A_3 son ambos movimientos B_2 y B_3, y que la mejor respuesta de Ella al moverse A_4 es mover B_3. Igualmente se hace para las mejores respuestas de Él. Como se puede comprobar existen dos equilibrios de Nash en estrategias puras: (A_2, B_1) y (A_3, B_3).

O Para los juegos bipersonales, la mejor respuesta se puede mostrar en un grafo. El **dígrafo bipartito de mejor respuesta** para juegos de dos jugadores se define de la siguiente manera: para cada acción del jugador 1 dibujamos un vértice en el lado izquierdo y para el jugador 2 en el derecho. Los vértices del jugador 1 se conectan con los vértices del jugador 2 que son las mejores respuestas a la acción correspondiente de 1. De la misma manera, las conexiones se hacen desde los vértices del jugador 2 hacia la mejor respuesta del jugador 1 vértices. Los equilibrios de Nash serían aquellos vértices que están conectados en ambos sentidos.

En nuestro ejemplo tendríamos:

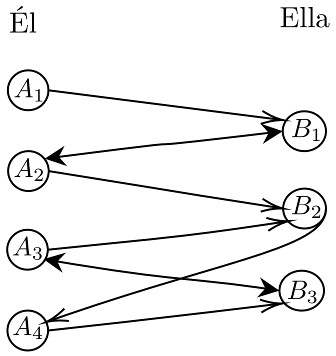
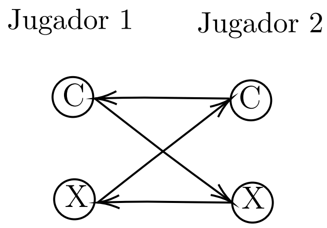


Figura 3.1: Grafo bipartito juego asimétrico

Se puede comprobar que no existe equilibrio puro para el *juego de monedas* 3.1:



Para juegos de más de dos personas no es posible la representación como grafo. Retomando el ejemplo de *Voto de los legisladores* 3.4 se tiene:

Tabla 3.7: Legisladores

	C vota subir	C vota bajar
A vota subir		
B vota subir	1, 1, 1	$\underline{1}$, $\underline{1}$, $\underline{2}$
B vota bajar	$\underline{2}$, $\underline{1}$, $\underline{1}$	0, -1, 0
A vota bajar		
B vota subir	$\underline{1}$, $\underline{2}$, $\underline{1}$	-1, 0, 0
B vota bajar	0, 0, -1	$\underline{0}$, $\underline{0}$, $\underline{0}$

Aquí tenemos cuatro equilibrios puros de Nash: $(\uparrow,\uparrow,\downarrow)$, $(\uparrow,\downarrow,\uparrow)$, $(\downarrow,\uparrow,\uparrow)$ y $(\downarrow,\downarrow,\downarrow)$. El cuarto equilibrio está dominado en sentido de Pareto por los otros tres, por lo que no es óptimo por Pareto y, por lo tanto, es menos importante que los otros tres.

Juegos simétricos

Un juego con función de utilidad $u_i : A = A_1 \times ... \times A_n \longrightarrow \mathbb{R}$ para un jugador i, siendo A_i es el conjunto de estrategias del jugador, y $A_1 = A_2 = ... = A_n$ se considera simétrico si para cualquier permutación π se tiene:

$$u_{\pi(i)}(a_1, a_2, ..., a_n) = u_i(a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, ..., a_{\pi(n)}).$$

Formalmente, para que un juego bipersonal sea simétrico, su matriz de recompensas debe ajustarse al siguiente esquema mostrado.

Tabla 3.8: Juego simétrico

	E1	E2
E1	a,a	b,c
E2	c,b	d,d

N Cualquier juego donde $c > a > b > d$ es un *Dilema del Prisionero*.

Ejemplo 3.8 — Dilema del Prisionero.

Dos sospechosos en un crimen son puestos en celdas separadas.

- Si ambos confiesan, cada uno será sentenciado a tres años de prisión.
- Si solo uno de ellos confiesa, será liberado y utilizado como testigo contra el otro, quien recibirá una sentencia de cuatro años.
- Si ninguno confiesa, ambos serán condenados por un delito menor y pasarán un año en prisión.

Tabla 3.9: Dilema del prisionero

	No confesar	Confesar
No confesar	-1,-1	-4,$\underline{0}$
Confesar	$\underline{0}$,-4	-$\underline{3}$,-$\underline{3}$

En este juego las estrategias $(Confesar, No\ Confesar)$, $(Confesar, No\ Confesar)$ y $(No\ Confesar, No\ Confesar)$ devuelven resultados que son óptimos de Pareto. La única estrategia que no es un óptimo de Pareto es $(Confesar, Confesar)$ ya que es dominada en el sentido de Pareto por $(No\ Confesar, No\ Confesar)$. No obstante, independientemente de lo que haga un jugador, el otro prefiere $Confesar$ a $No\ confesar$, de modo que el juego tiene un equilibrio de Nash único $(Confesar, Confesar)$.

Así, el *Dilema del Prisionero* da un resultado paradójico. El único equilibrio de Nash del juego, única estrategia que se debería jugar, es la única no óptima desde el punto de vista de Pareto, los jugadores jugarán movimientos que resulten en pagos más bajos para ambos de lo que es posible. Se trata un juego en el que se obtienen beneficios de la cooperación, el mejor resultado para los jugadores es que ninguno confiese, pero a este resultado solo se puede llegar si la comunicación es posible, lo que no se permite en un principio en las reglas.

Equilibrio de Nash mixto

En general es difícil calcular el equilibrio de Nash en estrategias mixtas, aunque sepamos que existe por 3.0.3, pero se hace fácil cuando es posible observar el **soporte**.

En un equilibrio de Nash, si dos estrategias puras del jugador i tienen ambas probabilidad positiva, entonces ambas deben proporcionar la misma utilidad esperada en el equilibrio ya que en caso contrario, el jugador nunca usaría la estrategia que le de menor pago. Es decir, en el equilibrio, un jugador debe tener que jugar indiferentemente cualquiera de sus estrategias con probabilidad positiva en la estrategia mixta.

Por lo tanto, el conjunto de estrategias con probabilidad positiva es un aspecto importante en el análisis del equilibrio. Para cualquier conjunto finito X, denotamos por $\delta(x) \in \Delta(X)$ la probabilidad de que δ se asigne a $x \in X$ y definimos el **soporte** de δ como $sop(\delta) = \{x \in X \mid \delta(x) > 0\}$.

Ejercicio 3.1 Cálculo del equilibrio mixto para el juego de *Guerra de sexos* 3.3. ▪

El juego es de la forma $\Gamma = \langle \{1, 2\}, C, u\rangle$ donde $C = \{A = Película\ A, B = Película\ B\}$ y $u = (u_1, u_2)$ viene dada por la tabla del ejemplo 3.3.

Γ posee dos equilibrios de Nash puros, que son (A, A) y (B, B). Supongamos que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ es un equilibrio de Nash mixto, $\alpha_i \in \Delta(C_i) \quad \forall i \in N$. Supongamos además que $(J1)$ elige A con probabilidad p y B con probabilidad $(1 - p)$ e igualmente $(J2)$ elige A con probabilidad q y B con probabilidad $(1 - q)$.

$$\begin{cases} \text{J1} : \alpha_1 = (\alpha_1(A), \alpha_1(B)) = (p, 1 - p), \\ \text{J2} : \alpha_2 = (\alpha_2(A), \alpha_2(B)) = (q, 1 - q). \end{cases}$$

En ese caso tendremos lo siguiente:

		q A	*1-q* B
p	A	*pq*	*p(1-q)*
1-p	B	*q(1-p)*	*(1-p)(1-q)*

Tabla 3.10: Probabilidades estrategias mixtas

$$u_1(\alpha) = 2pq + 0p(1-q) + 0q(1-p) + 1(1-p)(1-q),$$
$$u_2(\alpha) = 1pq + 0p(1-q) + 0q(1-p) + 2(1-p)(1-q).$$

Como se ha explicado anteriormente, la única forma en que $J1$ querría jugar una estrategia mixta es si es lo mismo para él jugar A y B, ya que en caso contrario si le es mejor jugar A lo haría con probabilidad 1. Esto supone que si $0 < p < 1$ entonces dado α_2, por el Teorema 3.0.2, para las acciones A y B de $J1$ se debe tener el mismo pago e igual para las de $J2$. Luego,

$$\begin{aligned} u_1([A],(q,1-q)) &= u_1([B],(q,1-q)) \\ 2q + 0(1-q) &= 0p + 1(1-q) \\ q &= \frac{1}{3}. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_2((p,1-p),[A]) &= u_2((p,1-p),[B]) \\ p + 0(1-p) &= 0p + 2(1-p) \\ p &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Obsérvese que según la notación vista $[A] = (1,0)$ y $[B] = (0,1)$. Además, por (3.2), se puede expresar las estrategias en el equilibrio por $q[A] + (1-q)[B]$ y $p[A] + (1-p)[B]$ para $J1$ y $J2$ respectivamente.

Luego la estrategia mixta $((\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}))$ es un equilibrio mixto. El juego de la *guerra de los sexos* tiene *múltiples equilibrios*. En este caso, jugar el último equilibrio es peor para ambos jugadores que jugar cualquiera de los otros dos, es un equilibrio *ineficiente*.

Es esclarecedor construir las funciones de mejor respuesta de los jugadores en la extensión mixta de este juego. Si $0 \leq \alpha_2(A) < \frac{1}{3}$, entonces la mejor respuesta única de $J1$, α_1, tiene $\alpha_1(A) = 0$; si $\frac{1}{3} < \alpha_2(A) \leq 1$, entonces su mejor respuesta única tiene $\alpha_1(A) = 1$; y si $\alpha_2(A) = \frac{1}{3}$ entonces, como vimos anteriormente, todas sus estrategias mixtas son las mejores respuestas. Haciendo un cálculo similar $J2$ obtenemos las funciones que se muestran a continuación.

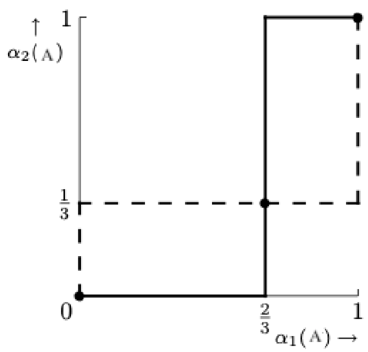


Figura 3.2: Mejor respuesta guerra de sexos

La función de mejor respuesta de $J1$ viene dada por la línea discontinua y el de $J2$ viene dado por la línea continua. Los puntos indican los dos equilibrios de Nash de estrategia pura y el equilibrio de Nash de estrategia mixta.

Cálculo del equilibrio mixto

A continuación describimos el procedimiento general expuesto en [1] para el cálculo del equilibrio de Nash para juegos en forma estratégica $\Gamma = \langle N, A, u \rangle$.

Aunque existen infinitos prefiles estratégicos mixtos, solo un número finito de subconjuntos de A pueden pertenecer al soporte del equilibrio. Podemos buscar equilibrios de Γ considerando secuencialmente varias suposiciones sobre cuál puede ser el soporte y buscando equilibrios con cada soporte propuesto.

Para cada jugador i, sea D_i un subconjunto no vacío de A_i, conjunto de las estrategias del jugador i, que representará nuestra suposición actual sobre qué estrategias del jugador tienen probabilidad positiva en el equilibrio. Si hay un equilibrio α con soporte $\times_{i\in N} D_i$, entonces deben existir números $(\omega_i)_{i\in N}$ de modo que se satisfagan las siguientes ecuaciones:

$$\sum_{a_{-i}\in A_{-i}} \Big(\prod_{j\in N-i} \alpha_j(a_j)\Big)\, u_i(c_{-i}, d_i) = \omega_i, \quad \forall i \in N, \forall d_i \in D_i, \tag{3.5a}$$

$$\alpha_i(e_i) = 0, \quad \forall i \in N, \forall e_i \in A_i \backslash D_i, \tag{3.5b}$$

$$\sum_{a_i \in D_i} \alpha_i(a_i) = 1, \quad \forall i \in N. \tag{3.5c}$$

La condición (3.5a) afirma que cada jugador debe obtener el mismo pago, denotado por ω_i, al elegir cualquiera de sus estrategias puras que tienen probabilidad positiva bajo α_i. Las condiciones (3.5b) y (3.5c) se derivan de la suposición de que α es un perfil de estrategia aleatorio con soporte $\times_{i\in N} D_i$. La condición (3.5b) afirma que las estrategias puras de i fuera de D_i tienen probabilidad cero, y la condición (3.5c) afirma que las probabilidades de las estrategias puras en D_i suman 1. Las condiciones (3.5a)-(3.5c) juntas implican que ω_i es el beneficio esperado del jugador i bajo α, porque

$$u_i(\alpha) = \sum_{d_i \in A_i} \alpha_i(d_i) u_i(\alpha_{-i}, [d_i]) = \omega_i.$$

Estas condiciones (3.5a)-(3.5c) nos dan $\sum_{i\in N}(|A_i| + 1)$ ecuaciones en el mismo número de incógnitas (las probabilidades $\alpha_i(a_i)$ y los pagos ω_i). Aquí $|A_i|$ denota el número de estrategias puras en el conjunto A_i. Por lo tanto, podemos esperar poder resolver estas ecuaciones. Para los juegos de bipersonales, estas ecuaciones son todas lineales en α y ω; pero (3.5a) se vuelve no lineal en α cuando hay más de dos jugadores, por lo que la tarea de resolver estas ecuaciones puede ser difícil.

Supongamos, sin embargo, que podemos encontrar todas las soluciones a las condiciones (3.5a)-(3.5c), dado el supuesto soporte $\times_{i\in N} D_i$. Estas soluciones no nos dan necesariamente los equilibrios de Γ, porque pueden surgir tres dificultades. Primero, puede que no existan soluciones. En segundo lugar, una solución puede no ser un perfil estratégico mixto, si algunos de los números $\alpha_i(a_i)$ son negativos. Entonces debemos exigir

$$\alpha_i(d_i) \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall d_i \in D_i. \tag{3.6}$$

Tercero, una solución que satisfaga (3.5a)-(3.5c) puede no ser un equilibrio si algún jugador i tiene alguna otra estrategia pura fuera de D_i que sería mejor para él contra α_{-i} que cualquier estrategia en D_i. Entonces también debemos exigir

$$\omega_i \geq \sum_{a_{-i}\in A_{-i}} \Big(\prod_{j\in N-i} \alpha_j(a_j)\Big)\ u_i(c_{-i}, e_i) \quad \forall i \in N, \forall e_i \in A_i \backslash D_i. \tag{3.7}$$

Si encontramos una solución (α, ω) para las ecuaciones (3.5a)-(3.5c) que también satisface (3.6) y (3.7), entonces α es un equilibrio de Nash de Γ, y ω_i es la recompensa esperada para el jugador i en este equilibrio.

Por otro lado, si no hay una solución que satisfaga (3.5a)-(3.7), entonces no hay equilibrio con el soporte $\times_{i\in N} D_i$. Para encontrar un equilibrio, debemos suponer otros soportes y repetir este procedimiento. El teorema de existencia de Nash 3.0.3 garantiza que habrá al menos un soporte $\times_{i\in N} D_i$ para el cual se pueden cumplir las condiciones (3.5a)-(3.7).

O En [9] se presentan otros algoritmos que reducen la complejidad computacional.

Interpretación del equilibrio mixto

Existen diversas interpretaciones que motivan la noción de equilibrio mixto:

- Se juega para aleatorizar como forma de **confundir** al oponente. Se puede considerar como ejemplo de esta interpretación el *juego de monedas*.
- Se juega para aleatorizar cuando se tiene **incertidumbre** sobre la acción del oponente. Considerar el ejemplo de la *guerra de sexos*.
- Las estrategias mixtas son una descripción concisa de que puede ocurrir en una **jugada repetida**, conteo de estrategias puras en el límite.

Racionabilidad y dominancia

Para desarrollar las ideas en este apartado no es necesario suponer que el conjunto de acciones A_i de cada jugador es finito, aunque por simplicidad adoptamos esta suposición.

En general, dado cualquier juego en forma estratégica $\Gamma = \langle N, (A_i)_{i\in N}, (u_i)_{i\in N}\rangle$, para cualquier jugador i y dos estrategias d_i y e_i en A_i decimos que d_i y e_i son **equivalentes en utilidad** si,

$$u_j(a_{-i}, d_i) = u_j(a_{-i}, e_i) \quad \forall a_{-i} \in A_{-i}, \forall j \in N.$$

Cuando son equivalentes en utilidad podemos simplificar la formal normal de Γ uniendo estas estrategias y reemplazando el conjunto de las estrategias equivalentes en pago por una sola estrategia.

Definición 3.0.5 — Estrategias estrictamente dominada.

La acción $a_i \in A_i$ del jugador i es **estrictamente dominada** si hay una estrategia mixta α_i del jugador i tal que $u_i(a_{-i}, \alpha_i) > u_i(a_{-i}, a_i),\ \forall a_{-i} \in A_{-i}$.

Definición 3.0.6 — Estrategias débilmente dominada.

La acción $a_i \in A_i$ del jugador i es **débilmente dominada** si hay una estrategia mixta α_i del jugador i tal que $u_i(a_{-i}, \alpha_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i),\ \forall a_{-i} \in A_{-i}$.

Si una estrategia domina al resto decimos que es **dominante**. Una estrategia es dominante si independientemente de las estrategias elegidas por los demás jugadores es la mejor respuesta del jugador i-ésimo. Un perfil estratégico que consista en estrategias dominantes para cada jugador es un equilibrio de Nash. Un equilibrio en estrategias estrictamente dominantes es **único**.

Un jugador **racional** nunca utilizará una estrategia estrictamente dominada, puesto que esta conducta sería inconsistente con adoptar siempre aquellas acciones que maximizan su bienestar, luego se pueden eliminar del juego. Como todos los jugadores son racionales podemos iterar eliminando así las estrategias estrictamente dominadas de Γ.

Sea el juego $\Gamma = \langle N, A, u\rangle$:

- Eliminamos todas las estrategias estrictamente dominadas. Tendremos un nuevo juego $\Gamma^1 = \langle N, A^1, u\rangle$.
- En este juego podemos volver a eliminar estrategias estrictamente dominadas para obtener el juego $\Gamma^2 = \langle N, A^2, u\rangle$.
- Procedemos iterativamente hasta que no se puedan eliminar más estrategias. Si hemos parado en Γ^k, este será el conjunto de estrategias racionalizables.

Definición 3.0.7 — Acciones racionalizables.

Si $X = \times_{j \in N} X_j$ con $X \subset A$ supera la eliminación iterativa de acciones estrictamente dominadas en un juego estratégico Γ se tiene que X_j es el conjunto de **acciones racionalizables** del jugador j para cada $j \in N$.

A los juegos a los que se puede llegar al equilibrio de Nash observando las estrategias racionalizables se conocen como juegos **solubles por dominancia**.

Ejemplo 3.9 Ejemplo de reducción de la forma normal de un juego.

	L	C	R
U	3,1	0,1	0,0
M	1,1	1,1	5,0
D	0,1	4,1	0,0

Tabla 3.11: Primera iteración estrategias dominadas

En rojo se ve que la estrategia pura R es dominada por L o R. Así que podemos eliminarla quedando,

		L	C
$\frac{1}{2}$	U	3,1	0,1
	M	1,1	1,1
$\frac{1}{2}$	D	0,1	4,1

Tabla 3.12: Segunda iteración estrategias dominadas

Ahora M es dominada por la estrategia en la que se elige U y D con la misma probabilidad. Finalmente nos queda un juego de la forma,

	L	C
U	3,1	0,1
D	0,1	4,1

Tabla 3.13: Juego sin estrategias dominadas

El orden de eliminación de las estrategias estrictamente dominadas no afecta al resultado. Pero cuidado, no se deben eliminar estrategias débilmente dominadas para encontrar las estrategias racionalizables, estas pueden formar parte de las mejores respuestas para algún jugador.

Equilibrio correlacionado

Supongamos que los jugadores observan la misma variable aleatoria. Esto nos llevan a la siguiente noción de equilibrio.

Definición 3.0.8 — Equilibrio correlacionado.

Sea $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ un juego estratégico, un **equilibrio correlacionado** de Γ consiste en:

- Un espacio finito de probabilidad (Ω, π), donde Ω es un conjunto de estados y π es una medida de probabilidad sobre Ω *(probabilidad a posteriori)*.
- Para cada jugador $i \in N$ una partición $\mathcal{P}_i$ de Ω (**partición de información** del jugador $i - \acute{e}simo$).
- Para cada jugador $i \in N$ una función $\sigma_i : \Omega \to A_i$ con $\sigma_i(\omega) = \sigma_i(\omega')$ cuando $\omega \in P_i$ y $\omega' \in P_i$ para alguna $P_i \in \mathcal{P}_i$ (σ_i es una **modificación de la estrategia** para el jugador i-ésimo).

Tal que para cada $i \in N$ y cada función $\tau_i : \Omega \to A_i$ para la que $\tau_i(\omega) = \tau_i(\omega')$ cuando $\omega \in P_i$ y $\omega' \in P_i$ para alguna $P_i \in \mathcal{P}_i$ se tiene:

$$\sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\sigma_{-i}(\omega), \sigma_i(\omega)) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \pi(\omega) u_i(\sigma_{-i}(\omega), \tau_i(\omega)) \tag{3.8}$$

En otras palabras, $((\Omega, \pi), P_i)$ es un equilibrio correlacionado si ningún jugador puede mejorar su utilidad esperada mediante una modificación de estrategia. Téngase en cuenta también que (3.8) es equivalente al requisito de que para cada estado ω que ocurre con probabilidad positiva, la acción $\sigma_i(\omega)$ es óptima dadas las estrategias de los otros jugadores y el conocimiento del jugador sobre ω.

La idea es que cada jugador elige su acción de acuerdo con su observación del valor de la misma señal pública. Una estrategia asigna una acción a cada posible observación que un jugador puede hacer. Si ningún jugador quisiera desviarse de la estrategia recomendada (asumiendo que los demás no se desvían), la distribución se llama un **equilibrio correlacionado**.

■ **Ejemplo 3.10** Supongamos, por ejemplo, que hay una variable aleatoria que toma los tres valores x, y y z, y que el jugador 1 solo sabe que la realización es x o que es miembro de $\{y, z\}$, mientras que el jugador 2 solo sabe que es miembro de $\{x, y\}$ o que es z. Es decir, la partición de información del jugador 1 es $\{\{x\}, \{y, z\}\}$ y la del jugador 2 es $\{\{x, y\}, \{z\}\}$.

Bajo estos supuestos, una estrategia del jugador 1 consiste en dos acciones: una que usa cuando sabe que la realización es x y otra que usa cuando sabe que la realización es miembro de $\{y, z\}$, y lo mismo en el caso del jugador 2. La estrategia de un jugador es óptima si, dada la estrategia del otro jugador, para cualquier realización de su información, no puede hacer nada mejor eligiendo una acción diferente de la dictada por su estrategia.

Para ilustrar cómo un jugador usa su información al elegir una acción óptima, suponga que las probabilidades de y y z son η y ζ y la estrategia del jugador 2 es tomar la acción a_2 si sabe que la realización está en $\{x, y\}$ y b_2 si sabe que la realización es z. Luego, si se informa al jugador 1 que ya ha ocurrido y o z elige una acción que es óptima dado que el jugador 2 elige a_2 con probabilidad $\eta/(\eta + \zeta)$, probabilidad de y condicional en $\{y, z\}$, y b_2 con probabilidad $\zeta/(\eta + \zeta)$.

Se cumple que el conjunto de equilibrios correlacionados contiene el conjunto de equilibrios de Nash en estrategias mixtas.

Proposición 3.0.4

Para cada equilibrio de Nash en estrategias mixtas α de un juego estratégico finito $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ existe un equilibrio correlacionado $\langle(\Omega, \pi), (\mathcal{P}_i), (\sigma_i)\rangle$ en el cual para cada jugador $i \in N$ la distribución sobre A_i inducida por σ_i es α_i

Demostración.

Basta considerar $\Omega = A$ y definir π como $\pi(a) = \prod_{j\in N} \alpha_j(a_j)$. Para cada $i \in N$ y $b_i \in A_i$ sea $P_i(b_i) = \{a \in A : a_i = b_i\}$ y sea $\mathcal{P}_i$ el conjunto de los $|A_i|$ conjuntos $P_i(b_i)$. Se define σ_i como $\sigma_i(a) = a_i$ para cada $a \in A$. Entonces, como α es un equilibrio en estrategias mixtas para Γ, se satiface 3.8 por 3.1. ■

Proposición 3.0.5

Sea $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ un juego estratégico. Cualquier combinación convexa de perfiles de pago de equilibrio correlacionados de Γ es un perfil de pago de equilibrio correlacionado de Γ.

Una de las ventajas de equilibrios correlacionados es que son computacionalmente menos costoso que los equilibrios de Nash. El cálculo de un equilibrio correlacionado sólo requiere la solución de un programa lineal mientras que la solución de un equilibrio de Nash requiere encontrar su punto fijo completamente.

Ejemplo 3.11

Considere el siguiente juego como un ejemplo de un equilibrio correlacionado. A la izquierda se encuentra el juego en forma estratégica. La tabla de la derecha muestra las opciones de los jugadores en función del estado en un equilibrio correlacionado del juego.

Tabla 3.14: Juego equilibrio correlacionado

	L	R
T	6,6	$\underline{2},\underline{7}$
B	$\underline{7},\underline{2}$	0,0

	L	R
T	y	z
B	x	

Los perfiles de pago de equilibrio de Nash son $(2, 7)$ y $(7, 2)$ *(puro)* y $(4\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3})$ *(mixto)*.

Sea $\Omega = \{x, y, z\}$ y $\pi(x) = \pi(y) = \pi(z) = \frac{1}{3}$ y sea la partición del jugador 1 $\{\{x\}, \{y, z\}\}$ y para el jugador 2 $\{\{x, y\}, \{z\}\}$. Se define una modificación de la estrategia de la siguiente forma: $\sigma_1(x) = B$ y $\sigma_1(y) = \sigma_1(z) = T$; $\sigma_2(x) = \sigma_2(y) = L$ y $\sigma_2(z) = R$. (La relación entre las elecciones y los estados se muestra en el lado derecho del ejemplo).

En el estado x, el jugador 1 sabe que el jugador 2 juega L y, por lo tanto, es óptimo para ella jugar B; en los estados y y z sabe que asigna probabilidades iguales usando L y R, de modo que es óptimo para el jugador 1 elegir T. Simétricamente, el comportamiento del jugador 2 es óptimo dado el jugador 1, y por lo tanto tenemos un equilibrio correlacionado, cuyo perfil de pago $(5, 5)$ (por ejemplo para el jugador 1 se tiene $\frac{1}{3}6 + \frac{1}{3}2 + \frac{1}{3}7 = 5$).

Este ejemplo, en el que podemos identificar el conjunto de estados con el conjunto de resultados, sugiere el siguiente resultado.

Proposición 3.0.6

Sea $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i)\rangle$ un juego estratégico finito. Cada distribución de probabilidad sobre los resultados que se pueden obtener en un equilibrio correlacionado de Γ se puede obtener en un equilibrio correlacionado en el que el conjunto de estados es A y para cada $i \in N$, la partición de información del jugador i consta de todos los conjuntos de la forma $\{a \in A : a_i = b_i\}$ para alguna acción $b_i \in A_i$.

Este resultado nos permite limitar la atención, al calcular los pagos de equilibrio correlacionados, a los equilibrios en los que el conjunto de estados es el conjunto de resultados. Sin embargo, tenga en cuenta que tales equilibrios pueden no tener una interpretación natural.

Equilibrio evolutivo

En esta sección describimos la idea básica detrás de una variante de la noción de equilibrio de Nash llamada **equilibrio evolutivo**. Esta noción está diseñada para modelar situaciones en las que las acciones de los jugadores están determinadas por las fuerzas de la evolución. Reducimos la discusión a la simplificación en la que los miembros de una sola población de organismos *(animales, humanos, plantas, ...)* interactúan entre sí por pares. En cada juego los organismos no eligen conscientemente acciones sino que heredan modos de comportamiento de sus antepasados o se les asigna por mutación.

Supongamos que cuando dos individuos de una especie determinada se encuentran juegan un juego $\Gamma = \langle \{1, 2\}, (A_1, A_2), (u_1, u_2) \rangle$, que es simétrico en el sentido de que

$$A_1 = A_2 \quad \text{y} \quad u_1(a, b) = u_2(b, a), \quad \forall a, b \in A_1.$$

Representemos la frecuencia relativa de interacciones dentro de pequeñas subespecies por algún parámetro de viscosidad $0 < \delta < 1$. En este caso suponemos que la función u mide la capacidad de cada organismo para sobrevivir.

La noción de equilibrio está diseñada para capturar un estado estable en el que todos los organismos toman esta acción y ningún mutante puede invadir la población. Más precisamente, la idea es que para cada acción posible $a \in A_1$, el proceso evolutivo ocasionalmente transforma una pequeña fracción de la población en mutantes que toman la acción a.

En un equilibrio, cualquiera de estos mutantes debe obtener un beneficio esperado menor que el de la acción de equilibrio, de modo que se extinga. Si la fracción $\delta > 0$ de la población consiste en mutantes que toman la acción a mientras que todos los demás organismos toman la acción b, entonces el beneficio promedio de un mutante es $\delta u(a, a) + (1 - \delta) u(a, b)$ (ya que la probabilidad de encontrarse con otro mutante es δ y de encontarse con un no mutante con $1 - \delta$), mientras que el beneficio promedio de un no mutante es $\delta u(b, a) + (1 - \delta) u(b, b)$.

En este sentido, sea $\alpha = (\alpha_1, \alpha_1)$ un perfil estretégico mixto con $\alpha_1 \in \Delta(A_1)$, para que α_1 sea un equilibrio evolutivo,

Definición 3.0.9 — Estrategia evolutivamente estable *(ESS)*.

Sea Γ un juego bipersonal estratégico simétrico como el expuesto arriba, α_1 se dice una **estrategia evolutivamente estable** si y solo si (α_1, α_1) es un equilibrio de Nash de Γ y para cada estrategia mixta τ_1, si $\tau_1 \neq \alpha_1$ entonces $\exists \delta \in (0, 1)$ tal que:

$$u_1(\tau_1, (1 - \delta)\alpha_1 + \delta\tau_1) < u_1(\alpha_1, (1 - \delta)\alpha_1 + \delta\tau_1). \tag{3.9}$$

Esto siginifa que la estrategia del equilibrio α_1 debe ser estrictamente mejor que cualquier estrategia τ_1 cuando existe una pequeña probabilidad de encontrarse con un individuo que está usando la estrategia alternativa τ_1.

■ **Ejemplo 3.12 — Juego de la gallina o juego del halcón y la paloma.**

Fue concebido para analizar el problema de Lorenz y Tinbergen, un concurso sobre un **recurso compartible**. Los concursantes pueden ser **Halcón** o **Paloma**. En realidad representan dos subtipos o morfos de una especie con diferentes estrategias. El Halcón primero muestra agresividad, luego se implica en una pelea hasta que gana o se lesiona (pierde). La Paloma si se enfrenta con una fuerza mayor escapa por seguridad, y en caso contrario intenta compartir el recurso. Dado que al recurso se le da el valor v y el daño por perder una pelea tiene un costo c:

- Si un Halcón se encuentra con una Paloma, obtiene el recurso completo v para sí mismo.
- Si un Halcón se encuentra con un Halcón, la mitad de las veces gana, y la mitad pierde, entonces su resultado promedio es $\frac{v}{2} - \frac{c}{2}$.
- Si una Paloma se encuentra con un Halcón, retrocederá y no obtendrá nada.
- Si una Paloma se encuentra con una Paloma, ambos comparten el recurso y obtienen $\frac{v}{2}$.

La forma matricial se puede normalizar dividiendo todo entre v obteniendo una matriz de pagos equivalente.

	H	P
H	$\frac{1}{2}(1-c)$,$\frac{1}{2}(1-c)$	1,0
P	0,1	$\frac{1}{2}$,$\frac{1}{2}$

Tabla 3.15: Juego del halcón y la paloma

Sea $\Delta(A_1)$ es conjunto de las estrategias mixtas sobre $\{H, P\}$. Si $c > 1$, el juego tiene una estrategia mixta única como equilibrio de Nash, en la que cada jugador usa la estrategia $(1 - \frac{1}{c}, \frac{1}{c})$. Esta estrategia es la única *ESS*. Por ejemplo, si $\tau_1 = [P] = (0, 1)$ se tiene que δ en (3.9) ha de cumplir[2]:

$$\begin{gathered} u_1(\tau_1, (1-\delta)\alpha_1 + \delta\tau_1) < u_1(\alpha_1, (1-\delta)\alpha_1 + \delta\tau_1) \\ \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2c} + \frac{1}{2c} < \frac{c\delta}{2} - \frac{c}{2} - \frac{\delta}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2c} \\ \delta < \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{c} - \frac{c}{2}}{1 - \frac{1}{2c} - \frac{c}{2}} \end{gathered}$$

De la misma forma, si $c < 1$ el juego tiene una estrategia mixta única como equilibrio de Nash en la que cada jugador usa la estrategia pura H, o como hemos notado $[H]$, esta estrategia es la única *ESS*.

En particular, en este caso, una población exclusiva de halcones no es evolutivamente estable.

[2] Se ha usado que $(1-\delta)\alpha_1 + \delta\tau_1 \;=\; \alpha_1 + \delta(\tau_1 - \alpha_1) \;=\; (\,(1-\frac{1}{c}) - \delta(1-\frac{1}{c}),\; \frac{1}{c} + \delta(1-\frac{1}{c})\,)$.

Algunos juegos bipersonales simétricos no tienen estrategias evolutivamente estables.

Ejemplo 3.13

Consideremos un juego como el anteriormente estable tal que $A_1 = A_2 = \{x, y, z\}$,

$$\begin{aligned}
u_1(x,x) = u_1(y,y) = u_1(z,z) = 1,\\
u_1(x,y) = u_1(y,z) = u_1(z,x) = 3,\\
u_1(y,x) = u_1(z,y) = u_1(x,z) = -3,
\end{aligned}$$

y $u_2(a_1, a_2) = u_1(a_2, a_1)$ para cada $a_1, a_2 \in A$.

Este juego tiene un único equilibrio mixto de Nash (α_1, α_1) tal que $\alpha_1 = \frac{1}{3}[x] + \frac{1}{3}[y] + \frac{1}{3}[z]$, pero la definición de estabilidad evolutiva no se cumple para este equilibrio si se toma por ejemplo $\tau_1 = [x]$. Se ha argumentado que este juego puede representar una situación inherentemente inestable.

Comportamiento social

El análisis evolutivo de los juegos ha permitido interpretar conflictos en los que se aplican las influencias sociales. En estos conflictos los competidores tienen cuatro posibles alternativas para la interacción estratégica, como se muestra en la Figura 3.3, donde $+$ representa un **beneficio** para el jugador y $-$ un **coste**. Dependiendo de su forma de actuar, un jugador se conoce como **donante** o **receptor**.

- En una **relación cooperativa** o **mutualista**, ambos jugadores son casi indistinguibles ya que ambos obtienen un beneficio en el juego al cooperar, es decir, el par se encuentra en una situación de juego donde ambos pueden ganar mediante la ejecución de una determinada estrategia.
- En una **relación altruista**, el donante, con un coste para sí mismo, proporciona un beneficio para el receptor. Esta situación suele presentarse cuando existe una relación de parentesco entre el donante y el receptor y la donación será de una sola vía. Los comportamientos en los que los beneficios se donan alternativamente (en ambas direcciones) a un costo, a menudo se denominan altruistas, pero en el análisis se puede ver que tal "altruismo" surge de estrategias "egoistas" optimizadas.
- El **rencor** es esencialmente una forma de altruismo "invertido" en el que se ayuda a un aliado al dañar al competidor del aliado[3]. El caso general es que el aliado está relacionado por parentesco y el beneficio es un entorno competitivo más fácil para el aliado. El aliado no participa de forma directa directa en el juego y competir supone de algún modo un coste para ambos jugadores.

[3] George Price, uno de los primeros modelizadores matemáticos del altruismo y el rencor, encontró esta equivalencia particularmente inquietante a nivel emocional.

- El **egoísmo** es el criterio base de toda elección estratégica desde la perspectiva de la teoría de juegos. El comportamiento racional se traslada a la teoría de juegos evolutivos en el sentido en el que las estrategias que no apuntan a la propia vida y la autorreplicación no son eficientes para ningún juego. Sin embargo, críticamente, esta situación se ve afectada por el hecho de que la competencia se lleva a cabo en múltiples niveles, es decir, a nivel genético, individual y grupal.

Para ver que alternativa se presenta en cada juego se observan cuales son las **estrategias evolutivamente estables.**

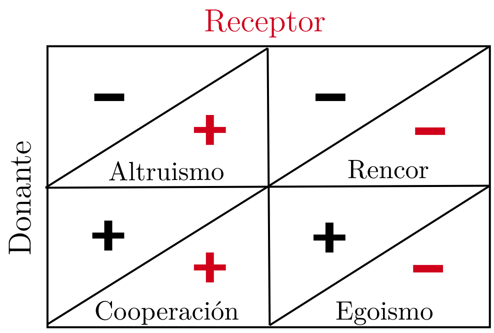


Figura 3.3: Comportamientos sociales

Todas las obras de arte deben empezar por el final.

Edgar Allan Poe

4 Juegos dinámicos

Un juego estratégico, o en forma normal, no incluye ninguna noción de *secuencia* o *tiempo* en el que las acciones de los jugadores se sobrevienen. Un juego dinámico, o en forma extensiva, es una formalización de los juegos que permite advertir la estructura temporal de este.

Para dar una definición rigurosa de un juego dinámico recurrimos a la *Teoría de Grafos*.

Definición 4.0.1 — Grafo.

Un **grafo** G es un par ordenado $G = (X, E)$ donde:

- $X \neq \emptyset$ es un conjunto de vértices o nodos.
- E es un conjunto de aristas o arcos que relacionan estos nodos.

Normalmente X suele ser finito. Se llama **orden** del grafo G a su número de vértices, notado por $|X|$.

Un **grafo dirigido** es aquel en el que todas sus aristas tienen sentido o dirección. De la misma forma que en el grafo generalizado, el grafo dirigido está definido por un par de conjuntos $G = (X, E)$, donde $E \subseteq \{(a, b) \in X \times X : a \neq b\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V, denominados aristas o arcos, en el que por definición un arco va del nodo a al nodo b dentro del par.

Un **camino** es un conjunto de aristas de la forma:

$$\{\{x_0, x_1\}, \{x_1, x_2\}, ..., \{x_{m-1}, x_m\}\} = \{\{x_k, x_{k-1}\}|k = 0, ..., m - 1\},$$

donde m ≥ 2 y cada $x_k \in X$ representa un nodo distinto del grafo.

Un **árbol dirigido** es un grafo dirigido donde cada par de nodos están conectados por exactamente una arista. Un **árbol dirigido con raíz** es un árbol que tiene un *nodo raíz* x_0 donde comienza todo el árbol, que se suele colocar arriba o a la izquierda, de forma que para cada $x \in X \setminus \{x_0\}$ existe un único camino desde x_0 a x. Cuando se habla del *camino hacia un nodo* se refiere al único camino que conecta ese nodo con el *nodo raíz*.

Una **alternativa en un nodo** de un árbol con raíz es cualquier arista que lo conecta con otro nodo que no está en el camino de ese nodo. Un nodo o arista x se dirá que **sigue** a otro nodo a arista y si y solo si está en el camino hacia x. Se dice que x **sigue inmediatamente** a y si y solo si x sigue a y y hay una alternativa en y que conecta x e y. Un nodo terminal es aquel que no tiene alternativas siguiéndolo. El conjunto de nodos terminales se denota por $Z(\subset X)$.

Definición 4.0.2 — Juego dinámico.

Sea $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, un **juego n-personal en forma extensiva** Γ_e es un árbol con raíz junto con una función que asigna etiquetas a los nodos y aristas cumpliendo las siguientes condiciones:

1. Cada nodo no terminal tiene una **etiqueta de jugador** que pertenece al conjunto $N = \{0, 1, 2, ..., n\}$. Los nodos asignados a la etiqueta 0 son los **nodos de riesgo**. El conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ representa a los jugadores y para cada i los nodos con esa etiqueta son **nodos de decisión** controlados por el jugador i.

2. Cada alternativa en un nodo de riesgo tiene una etiqueta que especifica su probabilidad. En cada nodo de riesgo las **probabilidades de riesgo** de las alternativas son números no negativos que suman 1.

3. Cada nodo controlado por un jugador tiene una segunda etiqueta que especifica el **estado de información** que el jugador tiene si se alcanza dicho nodo en el juego. Dos nodos que pertenecen al mismo jugador tienen la misma información si y solo si el jugador no es capaz de distinguir que alternativas han llevado a él.

N Se empleará la notación *i:k* ó *i.k* para indicar que el jugador i mueve con información k.

4. Cada alternativa en un nodo controlado por un jugador tiene una **etiqueta de movimiento**. Para dos nodos cualesquiera x e y con la misma etiqueta de jugador y mismo conjunto de información, y para cualquier alternativa en el nodo x, debe haber exactamente una alternativa con la misma etiqueta de movimiento en y.

5. Cada nodo terminal tiene una etiqueta $(u_1, ..., u_n) = (u_i)_{i \in N}$ que que especifica el pago o utilidad para cada jugador si el juego tiene como final ese resultado.

Si dos nodos no tienen el mismo estado de información se dice que el juego tiene **información perfecta**.

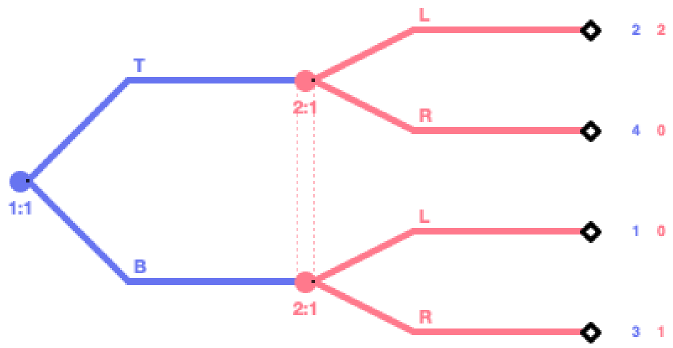


Figura 4.1: Juego extensivo 1

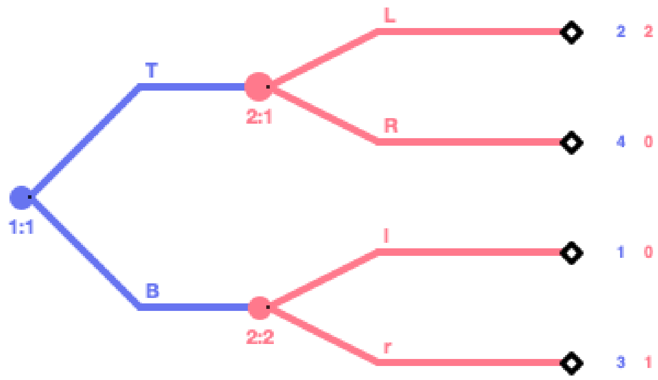


Figura 4.2: Juego extensivo 2

Asumiremos, en la mayoría de los juegos, que cumplen una sexta condición conocida como **recuerdo perfecto** *(perfect recall)*. Esta condición, afirma que cuando un jugador mueve, recuerda toda la información que sabía del juego, incluyendo sus movimientos pasados.

6. Para cualquier jugador i, para cualesquiera nodos x, y y z controlados por i, y para cualquier alternativa b de x, si y y z tienen el mismo estado de información y si y sigue a x y b, entonces existe algún nodo w y una alternativa c de w tal que z sigue a w y a c, w es controlado por el jugador i, w tiene el mismo estado de información que x y c tiene la misma etiqueta de movimiento que b.

El siguiente es un ejemplo de juego con *recuerdo imperfecto*.

■ Ejemplo 4.1 — Conductor olvidadizo.

Un estudiante conduce a casa después de haber pasado la tarde en el bar. En el camino a casa alcanza un semáforo en el que debe elegir entre ir a la *derecha* o *izquierda*. Si elige *izquierda* se encontrará con un acantilado, si elige *derecha* avanzará hasta otro semáforo en el que debe volver a elegir entre *derecha* o *izquierda*. Al haber tomado un par de cervezas el estudiante no recuerda si ya ha pasado un semáforo al llegar al segundo. Esta vez, si elige *izquierda* llegará a casa y si toma *derecha* llegará al cuartel de la policía. ■

[0]Los grafos de los juegos que se presentan en este capítulo se han realizado con el software *Gambit*.

Bajo esta descripción, el grafo muestra como una vez que llega al segundo semáforo olvida la elección del primero indicando que ambos nodos tienen el mismo estado de información. Los dos nodos unidos por *líneas discontinuas* tienen el mismo estado de información.

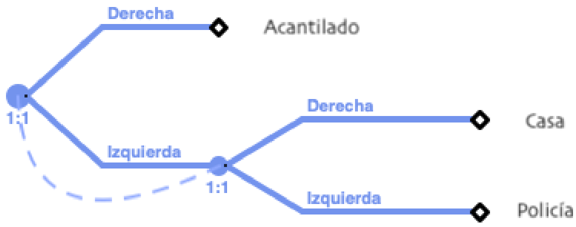


Figura 4.3: Juego del conductor olvidadizo.

A continuación se introduce la formalización de la definición 4.0.2 conveniente para el desarrollo del capítulo.

Definición 4.0.3 — Formalización juego dinámico.

Formalmente, un juego dinámico en forma extensiva consiste en:

- Un árbol dirigido $T = (X, E)$ con raíz x_0 y conjunto de nodos terminales $Z \subset X$.
- Un conjunto de jugadores $N = \{1, ..., n\}$.
- Un conjunto de funciones que indican para cada $x \notin Z$,
  - El jugador $i(x)$ que mueve en x.
  - El conjunto $A(x)$ de las posibles acciones en x
  - El nodo sucesor $n(x, a)$ resultante de la acción $a \in A(x)$.
- Una partición del conjunto de los vértices, llamada **partición de información**, en la que para cada x, $h(x)$ denota el conjunto de nodos para los que el jugador $i(x)$ conoce la misma información del devenir del juego (los nodos que tienen el mismo *estado de información*). Es decir, si $x' \in h(x)$ entonces $i(x') = i(x)$, $A(x') = A(x)$ y $h(x') = h(x)$.
- Una **función de probabilidad**, sea $R \subset X$ el conjunto de nodos de riesgo del juego y $x \in R$, $\rho : R \times A(x) \longrightarrow [0, 1]$ asigna la probabilidad $\rho(x, a)$ a la acción a que sale del nodo x.
- Las funciones de utilidad $u_i : Z \longrightarrow \mathbb{R}$ para cada juagdor i.

N

La notación $i(h)$ indica el jugador que mueve en el conjunto de información h y $A(h)$ indica las posibles acciones en h.

Por otro lado, se denota por $\mathcal{H}_i$ los conjuntos de información del jugador i,

$$\mathcal{H}_i = \{S \subset X \mid S = h(x) \;\text{ para algún }\; x \in X \;\text{ tal que }\; i(x) = i\}$$

y A_i las acciones disponibles para i en cualquiera de sus conjuntos de información.

O

Nótese que si $x \in Z$, es un nodo terminal, entonces $A(x) = 0$.

En un juego con información perfecta, los conjuntos h son unitarios.

Estrategias

Una **estrategia pura** para un jugador en un juego dinámico es cualquier **regla** que determina un movimiento en cada posible estado de información en el juego. Matemáticamente, una estrategia pura es una función que asigna estados de información a movimientos.

Definición 4.0.4 — Estrategia pura.

Una **estrategia pura** en juegos dinámicos para el i-ésimo jugador es una función $s_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow A_i$ tal que $s_i(h) = A(h)$ para cada $h \in \mathcal{H}_i$

Se denota S_i al conjunto de las estrategias puras disponibles para el jugador i, y $S = S_1 \times ... \times S_n$ el conjunto de perfiles de estrategias puras. Como en el capítulo anterior, $s = (s_1, ..., s_n)$ es un perfil estratégico y s_{-i} representa las estrategias de los oponentes del jugador i.

Ejemplo 4.2 — Ejemplos juegos en forma dinámica.

En el ejemplo de la Figura 4.1 se tiene:

- Estrategias para 1: $A_1 = \{T, B\}$
- Estrategias para 2: $A_2 = \{L, R\}$

En el ejemplo de la Figura 4.2 se tiene:

- Estrategias para 1: $A_1 = \{T, B\}$
- Estrategias para 2: $A_3 = \{Ll, Lr, Rl, Rr\}$

Donde, por ejemplo Ll significa que el jugador 2 hace L si el jugador 1 hace T y hace l si el jugador 1 hace B.

Definición 4.0.5 — Estrategia mixta.

Una **estrategia mixta** para un jugador $i \in N$ especifica una distribución de probabilidad sobre el conjunto de todas las estrategias puras para dicho jugador, $\tau_i \in \Delta(S_i)$.

Definición 4.0.6 — Estrategia de comportamiento.

Una **estrategia de comportamiento** es una función $\sigma_i : \mathcal{H}_i \longrightarrow \Delta(A_i)$ que especifica para un jugador i una distribución de probabilidad sobre cada posible estado de información del jugador.

Establecer relaciones de equivalencia entre perfiles de estrategias mixtas y de comportamiento requiere cierto esmero técnico [1]. Por ejemplo, se puede considerar el juego dado en la Figura 4.4.

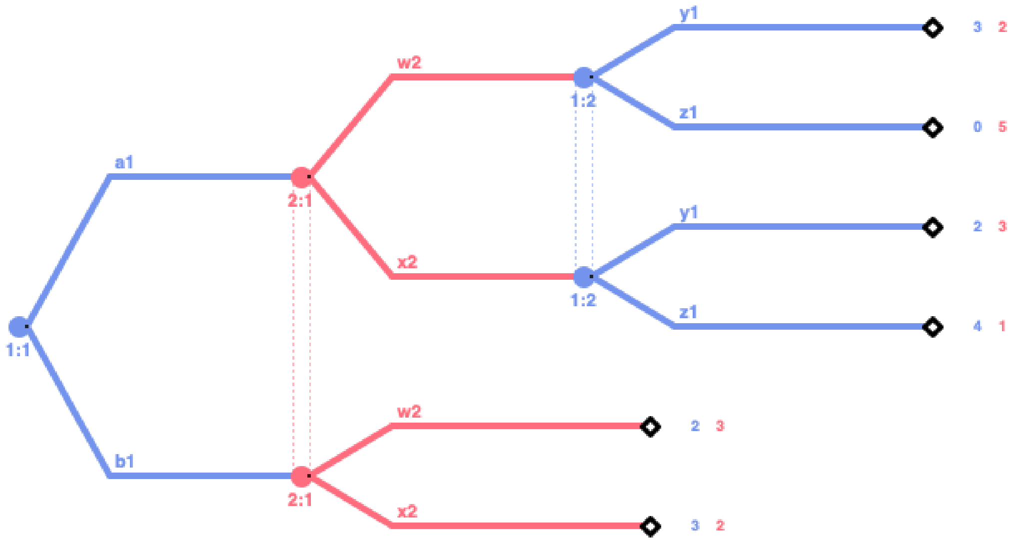


Figura 4.4: Juego extensivo 3

Se considera la estretegia mixta $.5[a_1y_1] + .5[b_1z_1]$ para el jugador 1. Al principio, puede parecer que esta estrategia mixta se corresponde con la estrategia de comportamiento $(.5[a_1] + .5[b_1],\ .5[y_1] + .5[z_1])$, pero esto no es así. La única forma en que el jugador 1 planearía usar z_1 en un nodo 1:2 bajo la estrategia mixta $.5[a_1y_1] + .5[b_1z_1]$ es si elige la estrategia pura b_1z_1, en cuyo caso el juego no podría alcanzar un nodo 1:2. De hecho, bajo la estrategia mixta $.5[a_1y_1]+.5[b_1z_1]$, el jugador 1 elegiría y_1 con probabilidad condicional 1 si el juego alcanzase un nodo 1:2, porque a_1y_1 es la única estrategia que tiene probabilidad positiva y es compatible con el estado de información 2 del jugador 1. Por lo tanto, la estrategia de comportamiento para el jugador 1 que corresponde a $.5[a_1y_1] + .5[b_1z_1]$ es $(.5[a_1] + .5[b_1], [y_1])$.

Teorema 4.0.1 — Teorema de Kuhn.

En juegos dinámicos con *recuerdo perfecto* las estrategias mixtas y de comportamiento son equivalentes en el sentido que para cada estrategia mixta hay una estrategia mixta equivalente y viceversa.

La definición de equivalencia del teorema no es nada intuitiva, véase [1][*pág* $158 - 160$]. La hipótesis de que el juego ha de tener *recuerdo perfecto* es necesaria para poder probar el *Teorema de Kuhn*. Como esencialmente todos los juegos que consideraremos tienen un *recuerdo perfecto*, utilizaremos estrategias mixtas y de comportamiento indistintamente.

Forma normal de un juego en forma extensiva

Von Newmann y Morgenstern dieron un procedimiento para dado un juego en forma extensiva Γ_e, definido según 4.0.2, construir su forma normal, ver [1] .

El conjunto N de jugadores en la forma normal del juego se identifica con el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ dado en la forma extensiva de Γ_e. Para cualquier jugador $i \in N$, consideramos que el conjunto de estrategias S_i de la forma normal Γ del juego es el mismo que el conjunto de estrategias para el jugador i en el juego en forma extensiva, es decir, cualquier estregia $s_i \in S_i$ es una función que especifica un movimiento $s_i(k)$ por cada estado de información k que el jugador pueda encontrarse en el trascurso del juego.

En juegos donde intervienen el azar, incluso si supiésemos la estrategia que cada jugador planea usar, todavía no podríamos predecir el resultado real del juego, porque no sabemos que desenlace tendrá la parte aleatoria. No obstante, podemos computar el pago esperado para cada jugador al usar una determinada estrategia.

Para cualquier perfil estratégico $s \in S$ y cualquier nodo x en el árbol de Γ_e, se define $P[x|_s]$ como la probabilidad de que el juego se desarrolle por el nodo x cuando el juego empieza desde el nodo raíz de Γ_e, quedando determinada la siguiente alternativa a incluir en la ruta del juego, en cualquier nodo de decisión, por la estrategia del jugador en s, y en cualquier nodo de riesgo, por la distribución de probabilidad dada en Γ_e. Matemáticamente, se puede formalizar esta defición por inducción como sigue:

- Si x es el nodo raíz de Γ_e, entonces $P[x|_s] = 1$.
- Si x sigue inmediatamente a un nodo de riesgo y y q es la probabilidad en esa arista de y a x entonces $P[x|_s] = qP[y|_s]$
- Si x sigue inmediatamente a un nodo de decisión y que pertenece al jugador i con estado de información k, entonces $P[x|_s] = P[y|_s]$ si $s_i(k)$ se corresponde con la alternativa que se juega de y a x, y $P[x|_s] = 0$ en caso contrario.

De esta forma, sea x un nodo terminal, se denota $w_i(x)$ la utilidad para el jugador i del nodo x en el juego Γ_e. Sea Z el conjunto de todos los nodos terminales del juego Γ_e. Entonces, para cualquier perfil estratégico $s \in S$ y cualquier $i \in N$ se define:

$$u_i(s) = \sum_{x \in Z} P[x|_s] w_i(x),$$

la utilidad esperada para el jugador i en Γ_e cuando todos los jugadores emplean las estrategias dadas por s.

Cuando $\Gamma = \langle N, (A_i), (u_i) \rangle$ se obtiene de Γ_e de esta forma, Γ se conoce como la **representación normal** de Γ_e.

O No siempre se puede llevar un juego en forma normal a un juego en forma extensiva, por ejemplo el *juego de las monedas*.

Ejercicio 4.1 Representación formal de los ejemplos anteriores. ■

- Para el primer ejemplo 4.1:

	L	R
T	2,2	4,0
B	1,0	3,1

Tabla 4.1: Forma normal juego extensivo 1

- Para el segundo ejemplo 4.2:

	Ll	Lr	Rl	Rr
T	2,2	2,2	4,0	4,0
B	1,0	3,1	1,0	3,1

Tabla 4.2: Forma normal juego extensivo 2

Como otro ejemplo, se puede considerar el siguiente juego en forma extensiva donde interviene el azar.

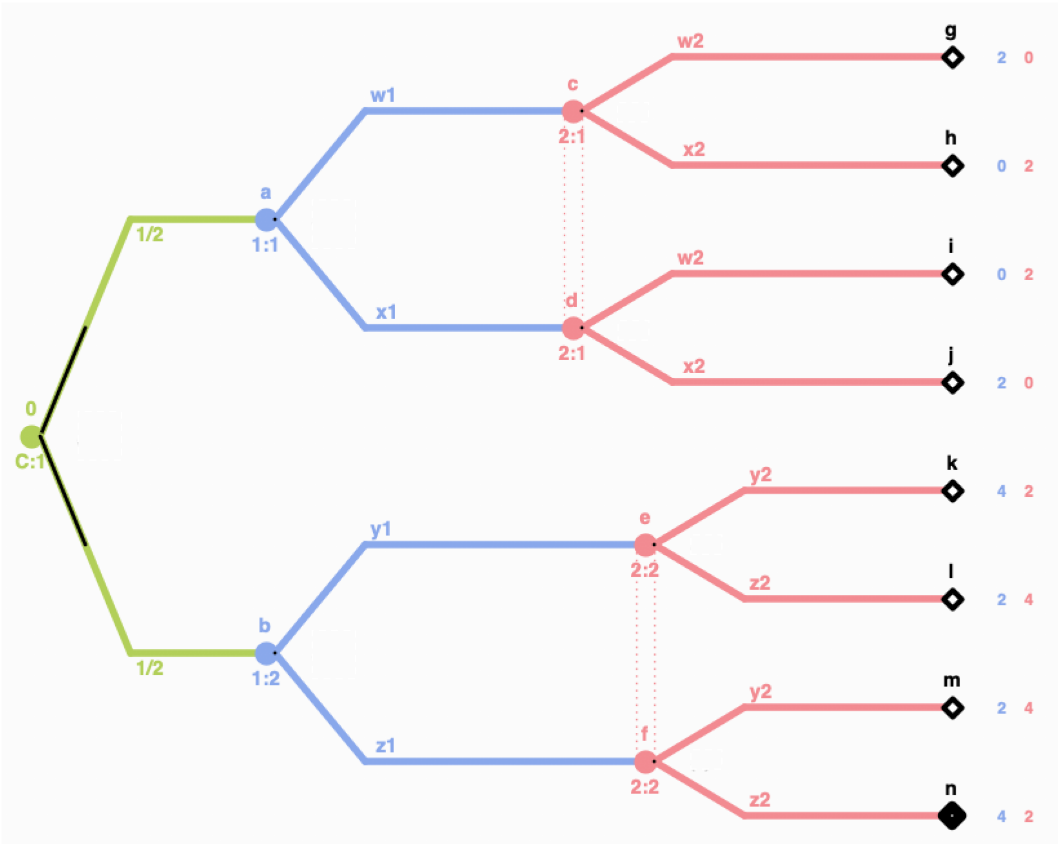


Figura 4.5: Juego extensivo 4

Aquí, por ejemplo, la primera casilla se obtiene de la siguiente forma:

Sea $s = (w_1y_1, w_2y_2)$,

$$u_1(s) = P[g|_s]w_1(g) + P[k|_s]w_1(k) = \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}4 = 3$$
$$u_2(s) = P[g|_s]w_2(g) + P[k|_s]w_2(k) = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}2 = 1$$

	w_2y_2	w_2z_2	x_2y_2	x_2z_2
w_1y_1	3,1	2,2	2,2	1,3
w_1z_1	2,2	3,1	1,3	2,2
x_1y_1	2,2	1,3	3,1	2,2
x_1z_1	1,3	2,2	2,2	3,1

Tabla 4.3: Forma normal juego extensivo 4

Juegos de tres o más jugadores

Es sencillo dar la forma extensiva de un juego con más de tres jugadores. En este caso, para dar la representación formal de un juego conviene recordar que un juego estratégico es una tupla de la forma $\Gamma = (N, S, u)$.

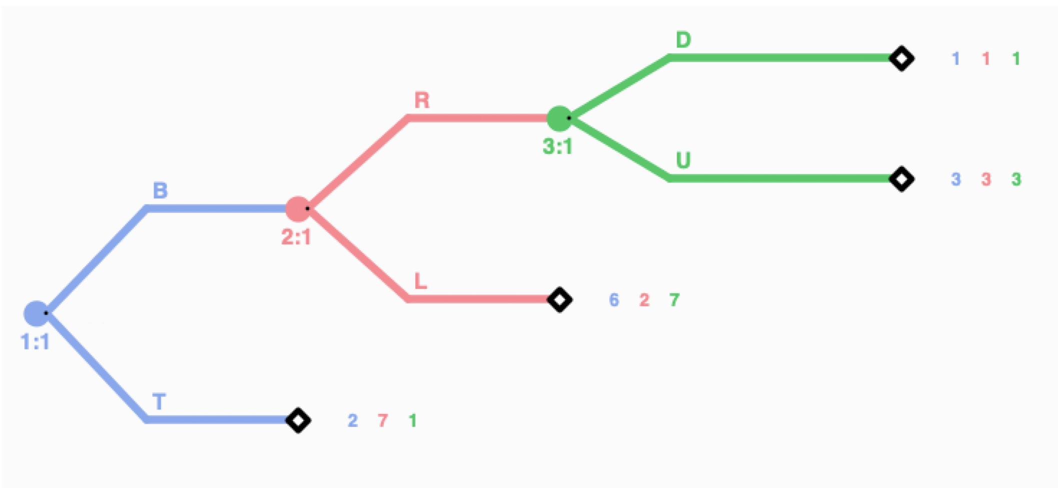


Figura 4.6: Juego extensivo 5

En este juego se tiene que $N = \{1, 2, 3\}$ y $S_1 = \{T, B\}$, $S_2 = \{L, R\}$ y $S_3 = \{U, D\}$, por lo que

$$S = \{(T, L, U), (T, L, D), (T, R, U), (T, R, D), (B, L, U), (B, L, D), (B, R, U), (B, R, D)\}$$

Finalmente los pagos para cada jugador pueden presentarse de la siguiente forma,

	T, L, U	T, L, D	T, R, U	T, R, D	B, L, U	B, L, D	B, R, U	B, R, D
u_1	2	2	2	2	6	6	3	1
u_2	7	7	7	7	2	2	3	1
u_3	1	1	1	1	7	7	3	1

Tabla 4.4: Forma normal juego extensivo 5

Esta forma es perfectamente aceptable, sin embargo, es más conveniente usar la representación ya expuesta en el capítulo anterior,

Tabla 4.5: Juego dinámico de tres personas

Jug. 3	U	D
Jug. 1 T		
Jug. 2 L	2,7,1	2,7,1
Jug. 2 R	2,7,1	2,7,1
Jug. 1 B		
Jug. 2 L	6,2,7	6,2,7
Jug. 2 R	3,3,3	1,1,1

Von Neumann y Morgenstern argumentaron que, en sentido general, la representación normal de un juego debe de ser todo lo necesario para el estudio de cualquier juego. La esencia de su razonamiento, como se explica en [1], fue la siguiente:

Si los jugadores son inteligentes, entonces cada jugador debería poder hacer los mismos cálculos que nosotros y determinar su plan de acción racional antes de que comience el juego. Por lo tanto, no debería haber pérdida de generalidad al suponer que todos los jugadores formulan sus planes de estrategia simultáneamente al comienzo del juego. Así, jugar al juego se convierte un proceso de implementación de estas estrategias y la determinación del resultado de acuerdo con las reglas del juego.

No obstante, desde el trabajo de Selten y de Kreps y Wilson, se comenzó a valorar el estudio del equilibrio de juegos en forma extensa, no solo en forma estratégica. A lo largo del capítulo se presentan conceptos propios del análisis de los juegos dinámicos en su forma extensiva que complementan el enfoque estratégico.

Equilibrio en juegos dinámicos

Para encontrar el equilibrio de Nash en un juego dinámico existen dos opciones. En primer lugar, se puede encontrar la forma normal equivalente para ese juego y calcular el equilibrio de Nash como si de un juego estratégico se tratase. El único problema con este método es que dos juegos dinámicos distintos pueden tener la misma forma normal. Alternativamente, se puede buscar el equilibrio directamente en el juego dinámico mediante el concepto de *equilibrio perfecto en subjuegos*.

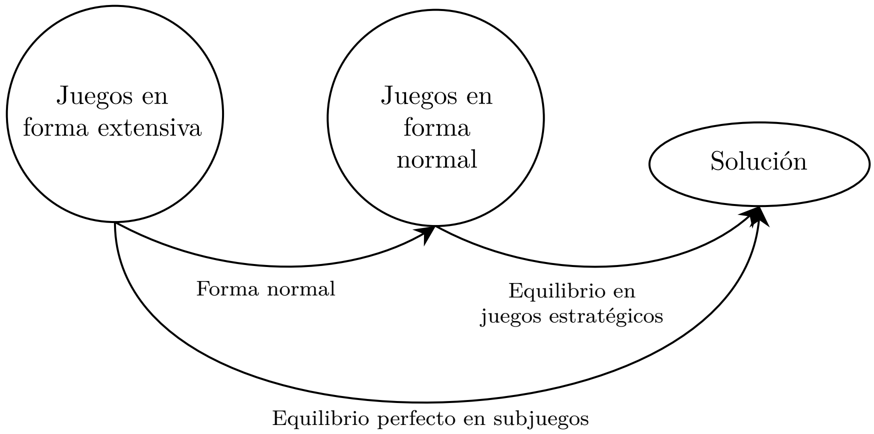


Figura 4.7: Equilibrio en juegos dinámicos

Equilibrio en subjuegos

Definición 4.0.7 — Subjuego.

Sea Γ_e un juego en forma extensiva, un **subjuego** Γ'_e con raíz en $y \in X$ es la restricción del juego Γ_e al juego que queda a partir del nodo y, con la propiedad de que cualquier conjunto de información de Γ_e se encuentra o bien completamente contenido en el subjuego o bien completamente excluido.

Estrictamente hablando, todo juego Γ_e es un subjuego en sí mismo, por lo que llamamos **subjuegos propios** a los subjuegos que son distintos a Γ_e.

Si se considera el juego en la Figura 4.6, se puede observar que tiene dos subjuegos propios. El primero es el juego que comienza desde el nodo de decisión del jugador 2 y el segundo es el juego que comienza desde el nodo de decisión del jugador 3. Sin embargo, sería erróneo pensar que todo juego tiene subjuegos propios. Considérese la forma extensiva del juego de las monedas 3.1 dado por la Figura 4.8.

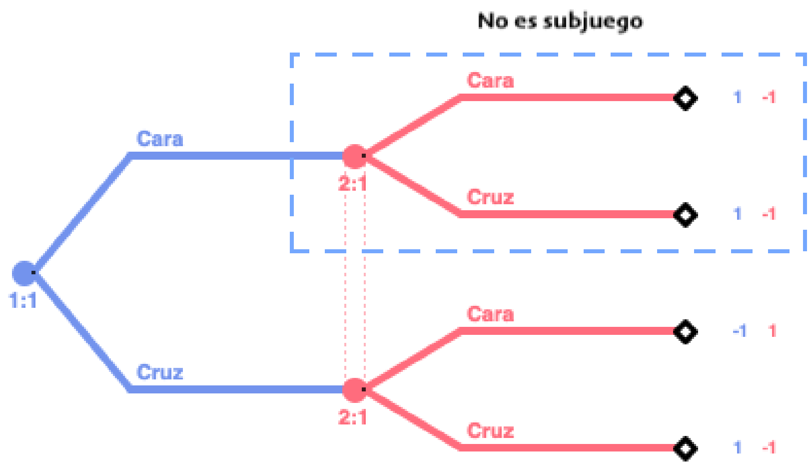


Figura 4.8: Juego de las monedas

En este juego no tiene sentido decir que hay un subjuego que comienza en cualquiera de los nodos de decisión del jugador 2. Esto se debe a que ambos nodos están en el mismo conjunto de información. Si un subjuego tuviese dicho nodo raíz, entonces el jugador 2 sabría en que nodo se encontraba, lo que viola la estructura original del juego.

Como otro ejemplo se puede considerar el siguiente juego, donde el subárbol que comienza desde el nodo de decisión del jugador 2 no es un subjuego, porque divide el conjunto de información del jugador 3.

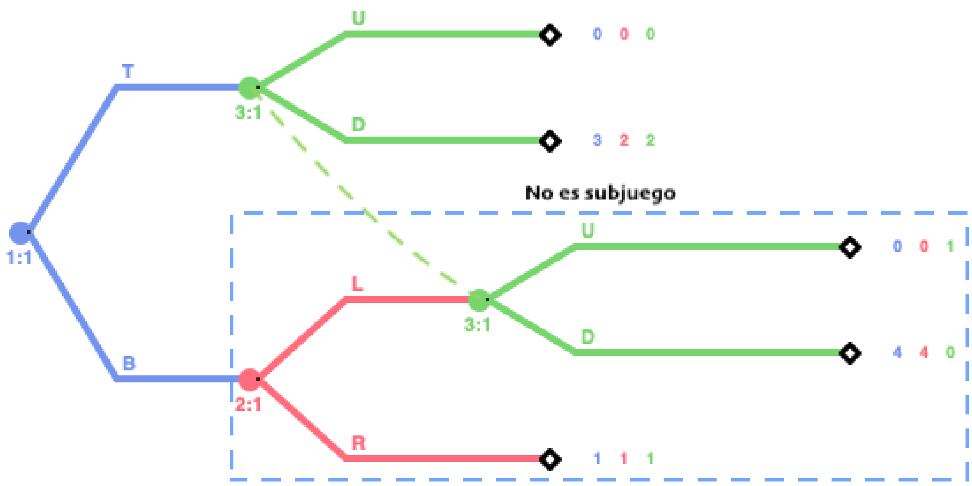


Figura 4.9: Juego extensivo 6

Un **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos** o *ENPS* es un concepto de solución para la búsqueda del equilibrio de Nash utilizado en juegos dinámicos. Un perfil estratégico es un equilibrio perfecto en subjuegos si genera un equilibrio de Nash en cada subjuego del juego original.

Proposición 4.0.2 — Equilibrio perfecto en subjuegos *(ENPS)*.

Un perfil estratégico s es un **equilibrio perfecto en subjuegos** de Γ_e si y solo si para cualquier subjuego Γ'_e de Γ_e, la restricción de s a Γ'_e es un equilibrio de Nash *(EN)* de Γ'_e.

Dado que un juego Γ_e es siempre un subjuego, cualquier *ENPS* también debe ser un *EN*.

Un juego en forma extensiva de juegos puede tener equilibrios que son *EN* pero no *ENPS*. La pregunta que subyace a continuación es si es posible tener un juego en forma extensiva que no tenga equilibrios perfectos en subjuegos. La respuesta es no. Selten en 1965 [10] demostró que cada juego finito en forma extensiva con recuerdo perfecto tiene al menos un equilibrio perfecto en subjuegos.

Inducción hacia atrás

Un método común para determinar los equilibrios perfectos en subjuegos para el caso de un juego finito es la **inducción hacia atrás**. En este tipo de resolución se consideran primero las últimas acciones del juego y a partir de ahí se determinan las acciones que los jugadores deben tomar en cada nodo del juego para maximizar su utilidad. Este proceso continúa hasta que se alcanza el nodo inicial. Las estrategias que permanecen son el conjunto de todos los equilibrios perfectos en subjuegos para la forma extensiva de un juego de horizonte finito con **información perfecta**.

Teorema 4.0.3 — Teorema de Zermelo.

Todo juego dinámico de **información perfecta** tiene un equilibrio perfecto en subjuegos para estrategias puras.

Demostración. En un juego finito de información perfecta, cada nodo no terminal puede etiquetarse como perteneciente a la etapa 1, etapa 2, ..., etapa K. Para encontrar una estrategia pura que sea *ENPS*, primero se consideran todos los nodos x en la etapa K. Cada nodo comienza un subjuego, por lo que si buscamos el equilibrio de Nash *(EN)* el jugador que se mueve debe maximizar su recompensa esperada. Se identifica la opción óptima (genéricamente, será única). Ahora se vuelve a la etapa $K-1$ y se considera el problema que enfrenta un jugador que se mueve aquí. Este jugador puede suponer que en la etapa K, el juego seguirá las opciones recién identificadas. Como cada nodo comienza un subjuego, buscamos la opción de maximización de la recompensa para jugador que se mueve. Una vez que se han identificado estas opciones, volvemos a la etapa $K-2$. Este proceso continúa hasta que lleguemos al comienzo del juego, en cuyo punto tendremos al menos uno (y no más de uno). ■

La demostración anterior resume el algoritmo de inducción hacia atrás [9],

function BACKWARDINDUCTION(*node* x) **return** $u(x)$;
if $x \in Z$ **then**
    return $u(x)$;
end
$best\_util \leftarrow -\infty$;
forall the $a \in A(x)$ **do**
    $util\_at\_child \leftarrow$ BACKWARDINDUCTION$(n(x, a))$;
    if $util\_at\_child_{i(x)} > best\_util_{i(x)}$ **then**
        $best\_util \leftarrow util\_at\_child$;
    end
    return $best\_util$;
end

Algorithm 1: Algoritmo de inducción hacia atrás

En este algoritmo recursivo, $util\_at\_child$ es un vector que indica la utilidad para cada jugador. El procedimiento no devuleve un equilibrio sino una extensión de la función de utilidad en los nodos no terminales. La estrategia del equilibrio tomará la mejor acción en cada nodo.

Como ejemplo se puede considerar el siguiente juego,

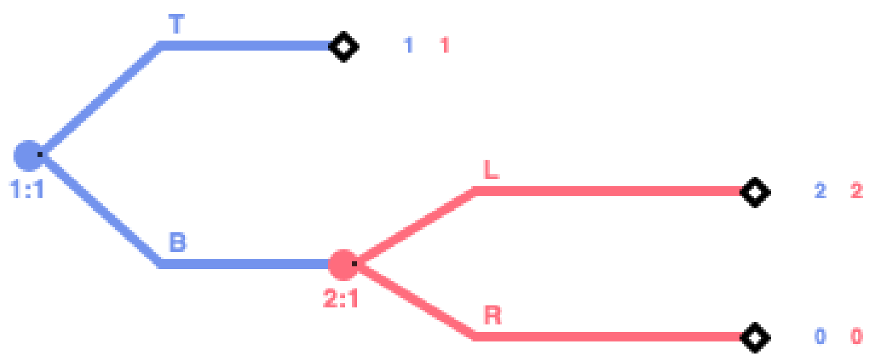


Figura 4.10: Juego extensivo 7

La representación formal del juego es la siguiente,

	R	L
T	$\underline{1}$,$\underline{1}$	1,$\underline{1}$
B	0,0	$\underline{2}$,$\underline{2}$

Tabla 4.6: Forma normal juego extensivo 7

Se observa que existen dos equilibrios de Nash puros posibles en el juego: (T, R) y (B, L).

Analizando el equilibrio (T, R) en la forma extensiva se advierte algo extraño. En un equilibrio perfecto en subjuegos, el jugador 2 debería comportarse racionalmente si se alcanza su conjunto de información. Seguramente, si se le pidiera al jugador 2 que se moviese, jugaría L en lugar de R. Por lo tanto, el jugador 2 que se declina por R no puede formar parte de un equilibrio perfecto de subjuego. Si decide jugar L, el jugador 1 preferirá B sobre T, y el único **equilibrio perfecto en subjuegos** de este juego es (B, L).

Este hecho se observa en la forma normal también, (B, L) es *mejor* ya que domina en el **sentido de Pareto** al equilibrio (T, R). La idea del equilibrio perfecto en el subjuego es deshacerse de este tipo de equilibrios de Nash.

Críticas al equilibrio perfecto en subjuegos

A medida que consideremos aplicaciones, se puede emplea regularmente el *ENPS* como un concepto de solución. Sin embargo, antes de hacer esto, vale la pena detenerse momentáneamente para preguntar si el *ENPS* podría ser demasiado entusiasta como solución de los juegos dinámicos.

En juegos con muchas etapas, la inducción hacia atrás enfatiza en gran medida el supuesto de racionalidad (y el conocimiento común de la racionalidad). Un ejemplo famoso debido a Rosenthal es el juego de ciempiés.

■ **Ejemplo 4.3 — El juego del ciempiés.**

Reglas: Participan dos jugadores. Al comienzo del juego hay dos *montones* de monedas, primer montón tiene 2 monedas, el segundo montón tiene 0. Por turno cada jugador debe elegir entre:

1) *Out*: Quedarse con el montón más grande y dejar el más pequeño al contrario.

2) *In*: Cambiar montones con el adversario.

Cada vez que un jugador elige la opción 2, los montones crecen 1 moneda. Si el juego llega a los 100 turnos y ninguno de los jugadores elige la opción 1, el juego termina y nadie gana nada. ■

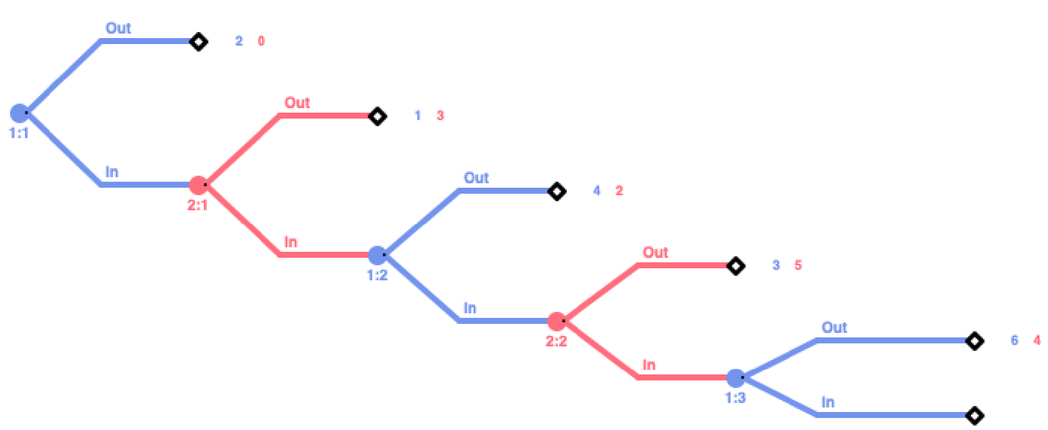


Figura 4.11: Juego del ciempiés.

Si el jugador 1 no elige *Out*, parar el juego en su ronda, el montón que obtiene en la siguiente sería menor que el que tiene en la ronda en la que juega. Por lo tanto, el único *ENPS* posible es que el jugador 1 comience eligiendo parar el juego, pero en la práctica las personas no parecen jugar el juego de esta manera, véase [11], [12] ó [13].

Para **juegos de suma nula**, el algoritmo de *inducción hacia atrás* recibe el nombre de **algoritmo mimimax**.

Generalmente, la inducción hacia atrás no puede ser aplicada a **juegos imperfectos** o de **información incompleta** porque esto implica tomar decisiones a través de conjuntos de información en lo que no se tiene información disponible.

Equilibrio secuencial

En **juegos imperfectos** debemos diferenciar dos conceptos distintos:

- La **estrategia** de un jugador en un conjunto de información dado determina cómo actúa este jugador en ese conjunto de información.
- La **creencia** de un jugador en un conjunto de información dado determina en qué nodo de ese conjunto de información cree el jugador que está jugando.

La *creencia* puede ser una distribución de probabilidad sobre los nodos en el conjunto de información. Formalmente, un sistema o perfil de creencias, del inglés *system of beliefs*, es una asignación de probabilidades a cada nodo del juego, de modo que la suma de probabilidades en cualquier conjunto de información es 1.

Definición 4.0.8 — Sistema o perfil de creencias.

Un *sistema de creencias* μ es una distribución de probabilidad para cada conjunto de información sobre los nodos del correspondiente conjunto de información.

Las estrategias y creencias deben satisfacer las siguientes condiciones:

- *Racionalidad secuencial*: cada estrategia debe ser óptima en expectativa, dadas las creencias.
- *Consistencia*: cada creencia debe actualizarse, de acuerdo con las estrategias y la regla de Bayes, en cada camino de probabilidad positiva (en caminos de probabilidad cero, también conocidos como caminos fuera del equilibrio, las creencias pueden ser arbitrarias).

Las creencias no se contradicen con el camino real que sigue el juego (en el camino del equilibrio). Los jugadores responden mejor a sus creencias.

Definición 4.0.9 — Equilibrio secuencial.

Un **equilibrio secuencial** es un par (σ, μ), donde σ es un perfil de estrategias de comportamiento y μ es un *sistema de creencias*, que cumple las siguientes hipótesis:

1) En cada conjunto de información, σ da peso positivo solo a aquellas acciones que son óptimas dadas σ y μ. A este hecho se le conoce como **racionalidad secuencial**.

2) μ y σ deben ser **consistentes**. Esto significa que si algo se puede inferir sobre μ usando σ entonces μ debe ser eso.

Si obviamos la hipótesis de *consistencia* se obtiene otro concepto de equilibrio conocido como **equilibrio perfecto bayesiano**, véase [14].

Formalmente, la *consistencia* requiere que exista una secuencia de perfiles de estrategia de comportamiento completamente mixtos $\sigma^t \to \sigma$ y $\mu^t \to \mu$ con μ^t la distribución condicional sobre los nodos inducidos por σ.

Para ver cómo funciona este concepto, considérese el juego en la Figura 4.12.

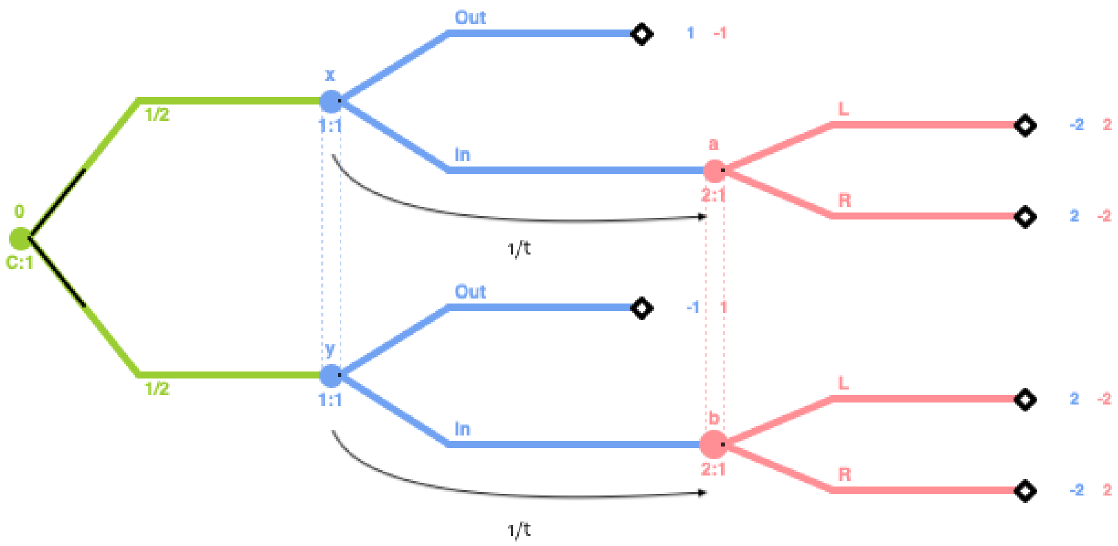


Figura 4.12: Juego extensivo 8

Cada jugador tiene dos nodos en su (único) conjunto de información. Bajo equilibrio secuencial se deben especificar las probabilidades con las que cada jugador cree que está en cada nodo en cada uno de sus conjuntos de información. Además, estas creencias deben ser consistentes con la estrategia de comportamiento del equilibrio.

Supóngase en este juego, $\sigma = \{(0,1),(1,0)\}$. Es decir, el jugador 1 elige *Out* y el jugador 2 elige L. Sea el perfil de creencias $\mu = ((\mu(x),\mu(y)),(\mu(a),\mu(b)))$, como el único movimiento previo al conjunto de información del jugador 1 es un movimiento de azar, movimiento regido por la *naturaleza*, las creencias del jugador 1 deberían de ser $\mu(x) = \frac{1}{2}$ y $\mu(y) = \frac{1}{2}$. Estas creencias serían consistentes con cualquier estrategia de comportamiento dado que cualquier estrategia de comportamiento que se esté jugando no afectará la probabilidad de que el jugador 1 esté en cualquiera de los nodos de su conjunto de información. Para encontrar las creencias del jugador 2 se necesita encontrar una estrategia de comportamiento completamente mixta cerca de σ. En realidad, solo debemos preocuparnos por la estrategia de comportamiento del jugador 1, ya que no hay movimientos del jugador 2 antes del conjunto de información del jugador 2. Supongamos que usamos $\sigma = (\frac{1}{t},\frac{t-1}{t})$ para el jugador 1. Entonces,

$$P[a] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{2t},$$
$$P[b] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{2t}.$$

Así,

$$\mu(a) = \frac{\frac{1}{2t}}{\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}} = \frac{1}{2},$$
$$\mu(b) = \frac{\frac{1}{2t}}{\frac{1}{2t}+\frac{1}{2t}} = \frac{1}{2}.$$

¿Por qué no usar la estrategia de comportamiento $(0,1)$ del jugador 1 para calcular el equilibrio secuencial? Porque en este caso, el jugador 1 eligiría *Out* y por lo tanto el conjunto de información del jugador 2 no se alcanzaría. Matemáticamente, se tendría

$$\mu(a) = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0}{\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot 0},$$

que no estaría definido. Por lo tanto, debemos usar estrategias de comportamiento completamente mixtas cercanas a σ para encontrar las creencias (consistentes), ya que si usamos una estrategia de comportamiento completamente mixta, cada información establecida en el juego se alcanzará con una probabilidad estrictamente positiva (incluso si la probabilidad es muy pequeña).

Gran parte del dinero que ganarás al póker no procederá de la brillantez de tu juego, sino de la ineptitud de tus oponentes.

Lou Krieger

5

Ejemplo: *VNM-Póker*

El juego que se plantea en este capítulo a modo de ejemplo es el **Póker de Von Neumann–Morgenstern**, al que nos referiremos como *VNM-Póker*. Fue introducido en el estudio *Theory of Games and Economic Behavior* [15].

Existe una variante más compleja que desarrolló el matemático Harold William Kuhn conocida como **Póker de Kuhn** [16] cuya explicación se desarrolla con detalle en [7][*pág* 185].

Ejemplo 5.1 — VNM-Póker(S,r,m,n).

Reglas: *Ann* mueve primero eligiendo entre **pasar** (*check*), jugar por m, o **subir** (*raise*), jugar por n.

- Si *Ann* **pasa**, ambas cartas se revelan y el jugador con la carta más alta obtiene el bote de $2m$. En el caso de un empatar, obtener la misma carta, el dinero se divide en partes iguales y cada uno tiene lo mismo que al principio.
- Si *Ann* **sube**, aumenta su apuesta total a n. Entonces *Beth* tiene dos opciones, **retirarse** (*fold*) o **ir** (*call*).
    - Si *Beth* se **retira**, *Ann* obtiene el dinero del bote de $n+m$, es decir, gana m. La carta de *Beth* no se revela.
    - Si *Beth* **va**, aumenta su apuesta a n. Entonces se revelan ambas cartas y el jugador con la carta más alta obtiene el $2n$ en el bote; es decir, gana n. En caso de empate, el dinero se divide en partes iguales.

El juego consta de cuatro parámetros: S, r, n, y m, con $m < n$. Hay cartas de valor 1 a S en un mazo, y cada valor ocurre r veces, $S \cdot r$ cartas en total. Hay dos jugadores, *Ann* y *Beth*. Cada jugador recibe aleatoriamente una carta del mazo, la mira, pero no se la muestra a su oponente. El *ante*[1] es m, lo que significa que ambos jugadores ponen m monedas, se suponen de igual valor, en el bote al comienzo del juego. La apuesta de cada jugador puede aumentar a n si el jugador pone $n - m$ dólares adicionales. El juego es de **suma cero**.

En primer lugar, se puede dar la forma extensiva del juego. Para ello es de rigor observar el *módulo* del juego que describe los movimientos de *Ann* y *Beth*. Combinamos módulos para dotar al juego de su forma extensiva completa.

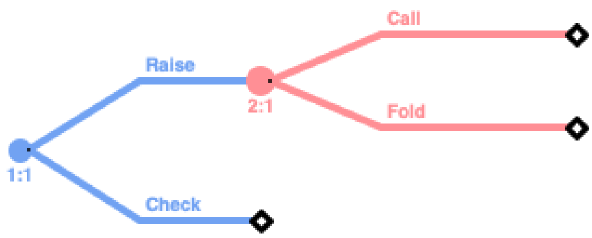


Figura 5.1: Módulo juego *VNM-Póker*

Se empieza con el reparto aleatorio de la carta, un **nodo de riesgo**. Supuesto $r > 1$, los jugadores pueden obtener cualquier carta de $1, 2, ..., S$, existen S^2 alternativas diferentes. Si $r = 1$, el número de alternativas sería de $S \cdot (S - 1)$.

Las alternativas para el movimiento aleatorio inicial no son igualmente probables. Por ejemplo, la probabilidad de obtener un $King$ es $\frac{r}{rS} = \frac{1}{S}$. Una vez que se ha sacado el $King$ del mazo, quedan $r - 1$ $King$ entre un total de $rS - 1$ cartas. De esta forma, la probabilidad de obtener un $King$ es de $\frac{r-1}{rS-1}$. En conclusión:

- Los casos donde *Ann* y *Beth* tienen cartas de igual valor x, presentan probabilidad

$$p_{xx} = \frac{1}{S} \cdot \frac{r-1}{rS-1} = \frac{r-1}{S(rS-1)}.$$

- Los casos donde *Ann* y *Beth* tienen cartas de distinto valor, x e y, presentan probabilidad

$$p_{xy} = \frac{1}{S} \cdot \frac{r}{rS-1} = \frac{r}{S(rS-1)}.$$

[1]La definición exacta de los términos que se usan en la descripción del juego pueden consultarse en https://www.poquer.com.es/glosario.html.

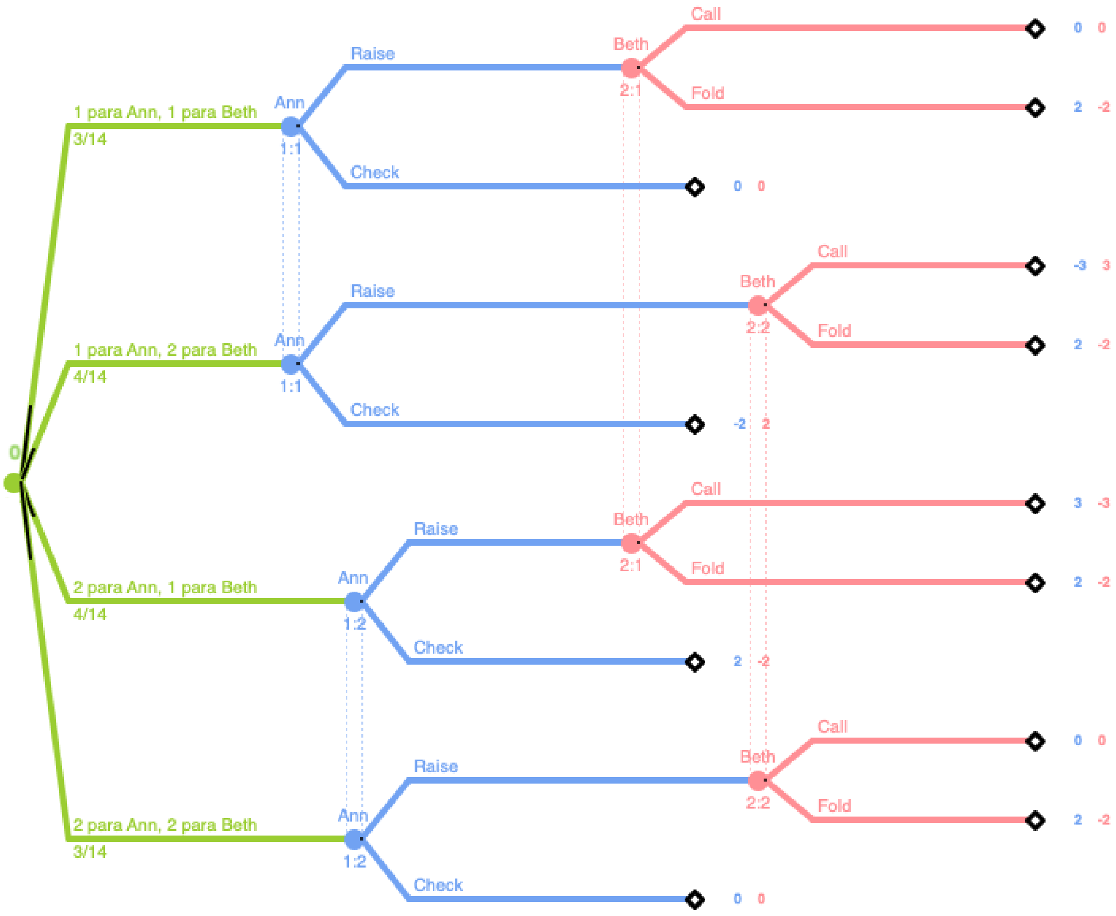


Figura 5.2: *VNM-Póker(2,4,2,3)*.

Estrategias:

Si $r > 1$ hay $S \cdot S$ diferentes combinaciones posibles de repartir un valor a *Ann* y otro a *Beth*. *Ann* solo puede ver su carta y, por lo tanto, tiene S conjuntos de información. En cada uno puede elegir entre *check* o *raise*. Es decir, Ann tiene 2^S estrategias puras. Se codifican las estrategias por secuencias de R y C; por ejemplo, $RCCR$ para $S = 4$ significa que *Ann raise* con la carta más baja y la más alta y *check* con las dos cartas de valor medio. Por su parte, *Beth* también tendrá S conjuntos de información. En cada uno podrá elegir entre *call* o $fold$. Por lo tanto, tiene 2^S estrategias puras. Igualmente, las estrategias están codificadas por secuencias de C y F.

Al final los pagos posibles son:

- *Ann* elige *check* $\to m$, 0 ó $-m$.
- *Ann* elige *raise* y *Beth* elige $fold \to m$.
- *Ann* elige *raise* y *Beth* elige *call* $\to n$, 0 ó $-n$.

En nuestro caso, vamos a suponer que $S = 2$ y $r \geq 2$.

Bajo este supuesto se tiene que el conjunto de estrategias puras para *Ann* es $\{CC$ (prudente), CR (razonable), RC (inútil), RR (agresiva)$\}$ y para *Beth* se tiene $\{FF$ (prudente), FC (razonable), CF (contraintuitiva), CC (agresiva)$\}$.

A continuación se presenta la forma normal de un juego **VNM-Póker(2,r,m,n)**,

	FF	FC	CF	CC
CC	0	0	0	0
CR	$\frac{m(r-1)}{4r-2}$	0	$\frac{nr-m}{4r-2}$	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RC	$\frac{(3r-1)m}{4r-2}$	$\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$	$\frac{2mr}{4r-2}$	$\frac{(m-n)r}{4r-2}$
RR	m	$\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$	$\frac{(2r-1)m+rn}{4r-2}$	0

Tabla 5.1: Forma normal *VNM-Póker(2,r,m,n)*.

Las expresiones de esta tabla se obtienen de la siguiente forma. Para cada par de estrategias, sea $u_{x,y}$ el pago que recibe *Ann* (al ser un juego de suma nula basta especificar solo una función de utilidad), siempre que ambos jugadores se ciñan a sus estrategias elegidas, dándose el caso de que *Ann* obtiene una carta de valor x y *Beth* una carta de valor y. Entonces la utilidad esperada para *Ann* se calcula con la siguiente expresión

$$p_{xx}u_{1,1} + p_{xy}u_{1,2} + p_{xy}u_{2,1} + p_{xx}u_{2,2},$$

Con las probabilidades para cartas de mismo valor $p_{xx} = \frac{r-1}{4r-2}$ y de distinto valor $p_{xx} = \frac{r}{4r-2}$.

Por ejemplo, si *Ann* juega el *RR* y *Beth* juega el *FC* se tiene que $u_{1,1} = m$, $u_{1,2} = -n$, $u_{2,1} = m$ y $u_{2,2} = 0$ y por lo tanto el pago que recibe *Ann* es

$$\begin{aligned}
&p_{xx} \cdot m + p_{xy} \cdot (-n) + p_{xy} \cdot m + p_{xx} \cdot 0 = \\
=&\frac{r-1}{4r-2} \cdot m + \frac{r}{4r-2} \cdot (-n) + \frac{r}{4r-2} \cdot m + \frac{r-1}{4r-2} \cdot 0 = \\
=&\frac{(r-1)m - rn + rm}{4r-2} = \\
=&\frac{(2r-1)m - rn}{4r-2}.
\end{aligned}$$

Algunas estrategias puras son débilmente dominadas. Cuando *Ann* tiene una carta de mayor valor, *raise* domina a *check*. Cualquiera de las estrategias de Ann $X...YC$ donde *Ann* estaría débilmente dominada por la estrategia $X...YR$. Cuando *Beth* tiene una carta de mayor valor, *call* domina a $fold$. Cualquiera de las estrategias de *Beth* $X...YF$ estaría débilmente dominada por $X...YC$.

De hecho, en el caso de *Beth*, las relaciones de dominancia van más allá:

Teorema 5.0.1

Todas las estrategias de *Beth* excepto $C...C$ y las de la forma $F...FC...C$, i.e. las que comienzan con algunas F seguidas de algunas (al menos una) C, están **débilmente dominadas**.

Demostración. Se encuentra en [7][*pág* 189]. ■

De esta forma eliminando las estrategias débilmente dominadas en nuestro ejemplo obtenemos la siguiente forma normal reducida,

	FC	CC
CR	0	$\frac{(n-m)r}{4r-2}$
RR	$\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$	0

Tabla 5.2: Forma normal reducida *VNM-Póker(2,r,m,n).*

Por otra parte, existe un concepto en el póker denominado *tirarse un farol*, donde un jugador sube ($raise$) aunque tiene una carta (o mano) de poco valor. Debido a que un jugador puede *tirarse un farol* en un determinado momento del juego, las relaciones de dominancia deben analizarse con cuidado. No obstante, y supuesta la hipótesis de *racionalidad* de los jugadores, las relaciones de dominancia antes expuestas deben mantenerse.

Análisis del juego:

- Equilibrio puro.

La entrada $\frac{(n-m)r}{4r-2}$ es siempre positiva. Si $\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$ no es positivo, entonces la estrategia de *Ann* CR domina débilmente a RR, y la estrategia de *Beth* FC domina débilmente a CC. Por la tanto, hay un equilibrio de Nash puro (CR, FC) con una utilidad esperada para *Ann* de 0.

El valor $\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2}$ es positivo cuando,

$$\frac{(2r-1)m-rn}{4r-2} \geq 0 \iff rn \geq (2r-1)m \iff \frac{n}{m} \geq \frac{2r-1}{r} \iff \frac{n}{m} \geq 2 - \frac{1}{r}.$$

- ¿Cómo jugarías contra un jugador que no necesariamente juega de manera óptima, sino que mezcla las dos estrategias puras no dominadas arbitrariamente?

Si suponemos que somos *Ann* y asumimos que *Beth* juega una estrategia mixta: elige FC con probabilidad q y CC con probabilidad $1-q$, i.e. *Beth* siempre elige *call* cuando tiene una carta de valor 2 y $fold$ con probabilidad q cuando tiene una carta de valor 1.

¿Cuándo respondería *Ann* a la estrategia mixta con CR y cuándo con RR? Para esto estudiemos la mejor respuesta posible. El pago que recibe *Ann* al jugar CR es $\frac{(1-q)(n-m)r}{4r-2}$ que es mayor o igual que el pago al jugar RR, que es $\frac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2}$, si[2]

$$\begin{aligned}
\frac{(1-q)(n-m)r}{4r-2} &\geq \frac{q((2r-1)m-rn)}{4r-2} \\
(1-q)(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn) \\
(n-m)r - q(n-m)r &\geq q((2r-1)m-rn) \\
(n-m)r &\geq q[((2r-1)m-rn)+(n-m)r] \\
(n-m)r &\geq q[(r-1)m].
\end{aligned}$$

[2]Obsérvese que bajo nuestro supuesto $4r-2>0$

Como $r \geq 2$ se tiene que $(r-1)m > 0$ y por lo tanto,

$$q^* = \frac{(n-m)r}{(r-1)m} \geq q.$$

Ergo *Ann* debe jugar la estrategia razonable CR, que no supone *tirarse un farol*, cuando *Beth* juega FC con probabilidad menor que q^*, i.e. si *Beth* juega demasiado agresivo. En otro caso, *Ann* debería jugar la estrategia agresiva RR. De la misma forma se puede analizar las mejores respuestas para *Beth*.

Como conclusión, el análisis muestra que *Ann* debería jugar opuestamente al comportamiento que observe en *Beth*. *Beth*, por otro lado, debe imitar la jugada que observa en *Ann*, ya sea agresiva o cautelosa. Esto advierte que la **lectura del oponente** es una parte fundamental del póker.

- Equilibrio mixto.

Si $\frac{n}{m} \geq 2 - \frac{1}{r}$, al no haber equilibrio de Nash puro, debe haber un equilibrio de Nash mixto.

Supóngase que *Ann* elige con probabilidad p y RR con probabilidad $1-p$ y *Beth* juega FC con probabilidad q y CC con probabilidad $1-q$. Dado que, como equilibrio de Nash, cada estrategia mixta es la mejor respuesta a la otra, y por lo tanto cada una de las estrategias puras CR y CC, respectivamente FC y CC, es una mejor respuesta a ellas, concluimos, como lo hicimos anteriormente, replicando los cálculos ya vistos en el capítulo de juegos estratégicos apartado 3.1, que

$$p = \frac{(2r-1)m - rn}{(r-1)m} \quad \text{y} \quad q = \frac{(n-m)r}{(r-1)m}.$$

- Cálculo estrategias de comportamiento usando estrategias mixtas y viceversa.

Si consideramos en detalle el juego en forma extensiva 5.3, los dos conjuntos de información de *Ann* no tienen historial. Si se alcanzan o no depende de un movimiento aleatorio, pero no de los movimientos anteriores de *Ann*, ya que ella no tiene ninguno.

Considérese una estrategia mixta de *Ann* de la forma $p_1[RR]+p_2[RC]+p_3[CR]+p_4[CC]$, donde $p_1+p_2+p_3+p_4 = 1$. La estrategia de comportamiento correspondiente es elegir *raise* con probabilidad p_1+p_2 al obtener un 1 y con probabilidad p_3+p_4 al obtener un 2.

Supongamos ahora estrategia de comportamiento de *raise* en el 40 % de los casos con un 1 y en el 80 % de los casos con un 2. Si traducimos la estrategia de comportamiento a estrategias mixtas, obtenemos

$$\begin{aligned}
p_1 &= p[RR] = 40\,\% \cdot 80\,\% = 32\,\%,\\
p_2 &= p[RC] = 40\,\% \cdot 20\,\% = 8\,\%,\\
p_3 &= p[CR] = 60\,\% \cdot 80\,\% = 48\,\%,\\
p_4 &= p[CC] = 60\,\% \cdot 20\,\% = 12\,\%.
\end{aligned}$$

El libro de Erich Prisner [7][*pág* 259−276] desarrolla en varios capítulos los juegos **VNM-Póker(4,4,3,5)**, **KUHN-Póker(3, 4, 2, 3)** y **End-of-Semester Poker Tournament** explicados con detalle e incluyendo demostraciones.

En un juego con más de dos jugadores apostar por el equilibrio de Nash puede llevar a la derrota, resulta extremadamente difícil identificarlo y, además, en el póker hay mucha información escondida, por lo que no resulta práctico hacer esta aproximación. Sin embargo, el análisis de estos juegos sirve de base para la construcción de agentes automáticos de póker (*bots*), véase [17],[18] ó [19] desarrollo de distintos algoritmos para el estudio de las posibles estragegias (*counterfactual regret minimization*, *EGT for extensive form games*, ...), véase [6], e incluso para la formulación de diversos modelos económicos.

Figura 5.3: Foto de John Von Neumann (derecha) y Oskar Morgenstern (izquierda).

Caballeros, debo recordarles que mis probabilidades de éxito aumentan en cada nuevo intento ...

John Forbes Nash

6 Juegos repetidos

Las personas pueden comportarse de manera diferente con aquellos con quienes esperan tener una relación a largo plazo que con aquellos con quienes no esperan una interacción futura. Para comprender cómo el comportamiento racional e inteligente puede verse afectado por la estructura de una relación a largo plazo, estudiamos los juegos repetidos.

El siguiente ejemplo es un supuesto de las circunstancias que pueden darse si se permite la repetición del juego.

Ejemplo 6.1 — Elegir un número.

Reglas: Cada jugador elige un entero entre 1 y 100. El jugador que nombre el entero más cercano a $\frac{2}{3}$ de la media gana, el resto pierde. Los empates se resuelven de forma aleatoria.

Análisis del juego:

- Supongamos que un jugador cree que la media será X (incluyendo su propio número entero). Entonces la estrategia óptima para ese jugador será dar $\frac{2}{3}X$.
- X tiene que ser menor que 100, así que la estrategia para cada jugador no podrá ser mayor que $\frac{2}{3}100 \approx 67$.
- Si X no puede ser mayor que 67, entonces la estrategia óptima para cualquier jugador no puede ser mayor que $\frac{2}{3}67$.
- Nuevamente, si X no puede ser mayor que $\frac{2}{3}67$, entonces la estretegia óptima para cualquier jugador no puede ser mayor que $(\frac{2}{3})^2 67$.
- Iterando llegamos a que el único equilibrio de Nash en el juego será que todos los jugadores elijan el 1.

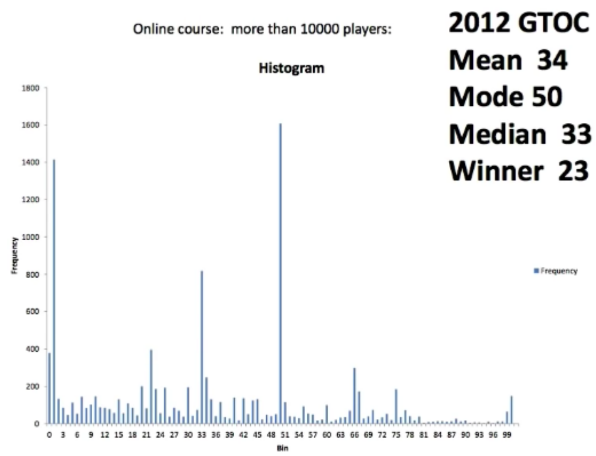


Figura 6.1: 1ª ronda elegir un número

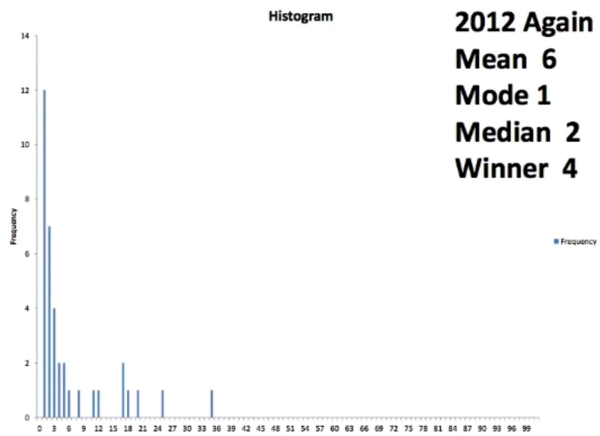


Figura 6.2: 2ª ronda elegir un número

No obstante, en la vida real el resultado no suele ser el esperado. Las primeras veces que se juega puede haber jugadores inexpertos que no jueguen el equilibrio de Nash, jugadores que no hayan entendido las reglas, etcétera. Pero si se repite el juego, los jugadores pueden aprender y se puede alcanzar el equilibrio de Nash.

Los histogramas anteriores representan dos rondas del juego 6.1 donde participaron 10000 jugadores, véase [9]. En la primera ronda, el valor marcado mayoritariamente fue 50, siendo 34 el valor medio, en la segunda, el valor más marcado por los jugadores fue 1, que coincide con el equilibrio de Nash del juego.

Es decir, si los jugadores son expertos y entienden las reglas del juego se puede esperar que se alcance el equilibrio, pero lo que es seguro es que, conforme se repita el juego, las estrategias que no conduncen al equilibrio dejen de jugarse.

Modelo general

Los juegos repetidos pueden estudiarse bajo los supuestos de los juegos dinámicos suponiendo que un juego estratégico es iterado un cierto número de veces. No obstante, su estudio requiere usar un modelo que vaya más allá de la forma extensiva finita.

En un juego repetido hay una *secuencia infinita de rondas* en las cuales los jugadores obtendrán información y elegirán sus movimientos. Se dice que tienen un **horizonte infinito**[1]. Dado que ningún movimiento puede considerarse el último, un jugador debe reparar en el efecto que su movimiento inflige sobre los futuros movimientos de otros jugadores y la información que este revelará a ellos. Tales consideraciones harán que los jugadores sean más cooperativos o beligerantes.

El siguiente modelo, propuesto por Mertens, Sorin y Zamir, véase [1], proporciona una estructura conceptual general.

Definición 6.0.1 — Juego repetido.

Un **juego repetido** es una tupla $\Gamma_r = (N, \Theta, (D_i, S_i, u_i)_{i\in N}, q, p)$ donde,

- N es el conjunto no vacío de jugadores.
- Θ es el conjunto no vacío de **estados de la naturaleza**.
- Para cada $i \in N$:
  - D_i es el conjunto de **movimientos**. Considerando la notación $D = \times_{i\in N} D_i$.
  - S_i es el conjunto de **señales** que un jugador puede recibir. Considerando la notación $S = \times_{i\in N} S_i$.
  - $u_i : D \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ la función de utilidad correspondiente.
- $q \in \Delta(S \times \Theta)$ es una distribución de probabilidad inicial.
- $p : D \times \Theta \longrightarrow \Delta(S \times \Theta)$ es una **función de transición**.

La señal S_i, que se recibe al principio del juego, recoge la información del jugador i sobre el *estado de la naturaleza*. En cada ronda k cada jugador debe elegir un movimiento en D_i. La probabilidad de que θ^k sea el *estado de la naturaleza* y que s_i^k sea la señal recibida en la ronda k viene dada por $q(s^k, \theta^k)$ con $s^k = (s_i^k)_{i\in N}$.

Sean $d = (d_i^k)_{i\in N}$ los movimientos de los jugadores en la ronda k, $u_i(d^k, \theta^k)$ es el pago asociado a cada jugador en esa ronda. Se usa la notación $p[s^{k+1}, \theta^{k+1}|_{d^k,\theta^k}]$ para indicar la probabilidad condicional de que se de s^{k+1} y θ^{k+1} en la ronda $k+1$, es decir, el valor de la función de transición de la ronda k a $k+1$ dados d^k y θ^k.

En un juego repetido, los pagos se dicen **acotados** si existe un número positivo γ tal que

$$|u_i(d, \theta)| \leq \gamma, \quad \forall i \in N, \forall d \in D, \forall \theta \in \Theta.$$

[1]De esta forma, los juegos repetidos un número finito de veces serán aquellos en los que a partir de una determinada ronda se recibe pago nulo, el juego ha parado.

Se dice que el estado de la naturaleza $\theta \in \Theta$ es **absorbente** si

$$\sum_{s \in S} p[s, \theta|_{d,\theta}] = 1 \quad \forall d \in D.$$

Si un estado es *absorbente* en una ronda lo será también en las siguientes.

En los juegos repetidos se asume que los jugadores en cada ronda k recuerdan las señales que ha ido obteniendo desde la ronda 1 hasta la k. Sobre los movimientos no tiene porqué haber recuerdo perfecto, para asegurar que un jugador recuerda sus movimientos pasados basta considerar en su conjunto de señales una componente que especifique su movimiento, e incluso el de los otros jugadores, de la ronda precedente, i.e. $S_i = \Theta \cup (\times_{i \in N} D_i)$.

El conjunto de todas las **estrategias puras** C_i para i en el juego repetido Γ_r es[2]

$$C_i = \{c_i = (c_i^k)_{k=1}^{\infty} \mid c_i^k : (S_i)^k \longrightarrow D_i, \quad \forall k\}.$$

Por su parte, el conjunto de las **estrategias de comportamiento** B_i para i se define similarmente

$$B_i = \{\sigma_i = (\sigma_i^k)_{k=1}^{\infty} \mid \sigma_i^k : (S_i)^k \longrightarrow \Delta(D_i), \quad \forall k\}.$$

Esto significa que para cualquier k y cualquier *historial* de señales $(s_i^1, ..., s_i^k) \in (S_i)^k$ una estrategia de comportamiento σ_i debe especificar una distribución de probabilidad $\sigma_i^k(\cdot|_{s_i^1,...,s_i^k}) \in \Delta(D_i)$, que describe como i determina aleatoriamente su movimiento en la ronda k en caso de observar esa secuencia de señales.

N Aquí se emplea la notación $(S_i)^k$ para indicar el producto cartesiano de k-pliegues[3] del conjunto S_i. También se identifican los conjuntos $C = \times_{i \in N} C_i$ y $B = \times_{i \in N} B_i$.

Dado el perfil estratégico de comportamiento $\sigma = (\sigma_i)_{i \in N} \in B$ se nota por $P^k[d, \theta|_\sigma]$ la probabilidad de que en la ronda k-ésima se tenga θ^k como *estado de la naturaleza* y d sea el perfil de movimientos elegido, usándose σ en todas las rondas.

[2] Obsérvese que el conjunto de estrategias puras ahora no sería finito.
[3] El producto cartesiano dado por la tupla de k componentes.

■ **Ejemplo 6.2 — Dilema del Prisionero repetido.**

En este ejemplo se juega de forma repetida el *Dilema del Prisionero*, véase 3.8.

Para aliviar cálculos y notaciones se considerará la forma normal con los pagos indicada en la Figura 6.1[a] siendo $No\ confesar$ el movimiento generoso del jugador y $Confesar$ el movimiento egoista. ■

[a]Los pagos se miden en años de libertad que el jugador disfrutará en seis años dependiendo de su elección. Aunque, como se detalló en el capítulo de juegos estratégicos, la forma de medir los pagos en irrelevante dado que cualquier juego simétrico que cumpla $c > a > b > d$ es un *Dilema del Prisionero*.

	$No\ confesar$	$Confesar$
$No\ confesar$	5,5	0,6
$Confesar$	6,0	$\underline{1}$,$\underline{1}$

Tabla 6.1: Dilema prisionero repetido

En la formalización del *Dilema del Prisionero repetido* según el modelo 6.0.1, $N = \{1, 2\}$ y $\Theta = \{0, 1\}$, donde $0 \equiv$ no se está jugando y $1 \equiv$ se está jugando. Para cada $i \in N$ se tiene $D_i = \{Confesar, No\ confesar\}$ y $S_i = \Theta \cup (D_1 \times D_2)$. Sea $d \in D$, la función de utillidad dependerá del *estado de la naturaleza*,

$$u_i(d, \theta) = \begin{cases} \text{como en la Tabla 6.1,} & \text{si } \theta = 1 \\ 0, & \text{si } \theta = 0. \end{cases}$$

Además se tiene que:

- $q(1, 1, 1) = 1$, lo que indica que con probabilidad 1 los jugadores reciben en la ronda 1 como señal 1 encontrándose en el estado de la naturaleza 1.
- $p(d, d, 1|_{d,1}) = 0.99$, probabilidad de que se pase a una ronda con estado 1[4].
- $p(0, 0, 0|_{d,1}) = 0.01$, probabilidad de que se pase a una ronda con estado 0.[5]
- $p(0, 0, 0|_{d,0}) = 1$, el estado $\theta = 0$ es *absorbente*.

Ejemplos de estrategias en este juego son:

- **Estrategia de gatillo** (*trigger strategy*). Estrategia en la que los jugadores siguen un patrón de juego fijo: cooperar g_i hasta que se produce una desviación, a partir de la cual una acción de equilibrio de Nash del juego escenario se juega para siempre. En estas estrategias, el desvío de un jugador se puede interpretar como un **castigo**.

- **Estrategia toma y daca** (*tit-for-tat strategy*). Estrategia en la que el jugador empieza jugando un patrón inicial, cooperar g_i. Cuando el rival se devía de esta estrategia, el jugador también se desvía en la siguiente ronda para luego seguir con la alternativa inicial.

[4]Por seguir una distribución geométrica, se explica más adelante en el capítulo.
[5]Es el complementario de la anterior.

Aprender en juegos repetidos

El factor *repetición* permite la posibilidad de obtener conocimientos sobre la estructura del juego en el trascurso de este. En el siguiente apartado se recogen dos reglas de aprendizaje de las muchas que existen.

Juego ficticio

El **juego ficticio** (*ficticious play*) es una algoritmo de aprendizaje introducido por primera vez por George W. Brown.

En cada ronda, cada jugador responde mejor a la frecuencia empírica de juego de su oponente. Tal método es, por supuesto, adecuado si el oponente usa una estrategia estacionaria[6], mientras que es ineficaz si la estrategia del oponente no es estacionaria. La estrategia del oponente puede, por ejemplo, estar condicionada al último movimiento del jugador ficticio.

Definición 6.0.2 — Algoritmo juego ficticio.

- Inicializar creencias sobre las estrategias del oponente.
- Cada turno:
  - Juega la mejor respuesta a la estrategia evaluada del oponente.
  - Observar el juego real del oponente y actualizar las creencias en consecuencia.

Formalmente, sea $w(a)$ el número de veces que el oponente ha jugado la acción $a \in A$. Estos valores se pueden inicializar a valores iniciales distintos de cero, que podrían representar las *creencias* sobre el oponente. La estrategia del oponente es evaluada usando las frecuencias y se computa la estrategia mixta con probabilidades proporcionales:

$$\sigma(a) = \frac{w(a)}{\sum_{a' \in A} w(a')}$$

Finalmente se elige la estrategia pura[7] que mejor responde a la estrategia evaluada.

Ejemplo 6.3

La Tabla 6.3 representa un ejemplo de como la regla del *juego ficticio* se puede aplicar al *juego de las monedas* 3.1.

Recordamos la forma normal del *juego de las monedas*,

Tabla 6.2: Módulo juego de monedas

	Cara	Cruz
cara	1,-1	-1,1
cruz	-1,1	1,-1

[6] Que no depende del tiempo, que permanece en el mismo estado o situación, sin cambiar.

[7] Hay una cierta paradoja en este algoritmo, se observan estrategias mixtas pero se terminan jugando estrategias puras.

Si se supone que las creencias iniciales del jugador 1 sobre el jugador 2 vienen dadas por las frecuencias ($Cara = 1.5, Cruz = 2$) y del jugador 2 sobre el jugador 1 son ($Cara = 2, Cruz = 1.5$), entonces la aplicación del algortimo deja el siguiente resultado:

Ronda	**Acción de 1**	**Acción de 2**	**Creencias de 1**	**Creencias de 2**
0			(1.5,2)	(2,1.5)
1	*cruz*	*cruz*	(1.5,3)	(2,2.5)
2	*cruz*	*cara*	(2.5,3)	(2,3.5)
3	*cruz*	*cara*	(3.5,3)	(2,4.5)
4	*cara*	*cara*	(4.5,3)	(3,4.5)
5	*cara*	*cara*	(5.5,3)	(4,4.5)

Tabla 6.3: Algortimo del juego ficticio en el juego de las monedas.

Por ejemplo, dada que la creencia del jugador 1 sobre el 2 en la ronda 0 es que piensa que jugará *cruz*, prefiere jugar *cruz* que le aporta un pago de 1 frente al pago negativo que le aporta *cara*. Siguiendo el mismo razonamiento, el jugador 2 preferiría jugar *cruz*.

En este juego no se observa una convergencia a una estrategia pura clara, sin embargo, jugando sí que se percibe que se converge a la estrategia mixta ($0.5[cara]$, $0.5[cruz]$), como ya se dedujo en el capítulo de juegos estratégicos, que se conoce como **distribución empírica**.

Teorema 6.0.1 — Convergencia del algoritmo *juego ficticio*.

Si el *juego ficticio* converge a cualquier distribución (*distribución empírica*), esas probabilidades corresponden a un equilibrio de Nash del juego subyacente.

Teorema 6.0.2 — Condiciones de convergencia del algoritmo *juego ficticio*.

Cada uno de los siguientes son condiciones suficientes para que las frecuencias empíricas de juego converjan en un *juego ficticio*:

- El juego es suma cero.
- El juego se puede resolver mediante la eliminación iterativa de estrategias estrictamente dominadas.
- El juego es un juego potencial.
- El juego es $2 \times n$ y tiene pagos genéricos.

En el *juego ficticio*, los equilibrios estrictos de Nash son *estados absorbentes*. Las frecuencias se van actualizando en cada ronda. Si se dispone de un historial lo suficientemente amplio sobre las partidas pasadas se podría inferir la jugada siguiente. No obstante, esto puede producir que el oponente conozca nuestro planteamiento y nos *engañe* ya que conocería nuestra estrategia.

Aprendizaje sin arrepentimiento

En este caso no nos centramos en las acciones de nuestros oponentes, sino en el efecto que nuestra elección puede producir en nosotros mismos. Empezamos definiendo el concepto de *arrepentimiento*,

Definición 6.0.3 — Arrepentimiento.

El **arrepentimiento** que un agente experimenta en un tiempo t por no haber jugado la estrategia s viene dado por $R^t(s) = \alpha^t - \alpha^t(s)$, donde α^t representa el pago que recibe el jugador y $\alpha^t(s)$ es el pago que hubiese recibido en caso de jugar s.

A continuación se presenta el criterio que queremos que nuestra regla cumpla,

Definición 6.0.4 — Aprendizaje sin arrepentimiento.

Una regla de aprendizaje no muestra arrepentimiento si para cualquier estrategia pura s del agente se tiene que $Pr([lim \text{ inf } R^t(s)] \leq 0) = 1$.

Es decir, si en el límite se da que $\alpha^t \leq \alpha^t(s)$, la probabilidad del que el arreprentimiento se acerque a cero es 1, lo que implica que el agente involucrado no manifiesta arrepentimiento por no haber elegido la estrategia s.

Regret Matching

El algoritmo de aprendizaje de *regret matching*, presente en Algoritmo 2, es un ejemplo de regla que sigue este principio.

En cada momento se observa el arrepentimiento experimentado hasta entonces por el jugador y para cada una de las estrategias puras elegidas cada acción se elige con probabilidad proporcional a su arrepentimiento. Es decir,

$$\sigma_i^{t+1}(s) = \frac{R^t(s)}{\sum_{s' \in S_i} R^t(s')},$$

donde $\sigma_i^{t+1}(s)$ es la probabilidad de que el agente i juegue una estrategia pura s en el tiempo $t+1$.

Para esta regla en *juegos finitos* se tiene,

Proposición 6.0.3 — Convergencia regla *regret matching* en juegos finitos.

La regla de aprendizaje sin arrepentimiento converge en juegos finitos a un **equilibrio correlado**.

Regret matching
Elegir $s \in S_i$; *estrategia pura inicial*
$t = 0$; *índice de tiempo*
$R = (0, ..., 0)$; *R es el arrepentimiento relativo de cada estrategia pura*
$U = 0$; *pago total acumulado*
repeat
  $t = t + 1$;
  Jugar s en el tiempo t y obetener u_a^t ;
  $U = U + u_a^t$;
  for cada $s' \in S_i$ con $s' \neq s$ **do**
    Sea V el pago total que hubiera recibido i si en las rondas anteriores hubiera jugado s' en vez de s ;
    $R_{s'} = V - U$;
  end
  Elegir una nueva estrategia pura $s \in S_i$ con probabilidades proporcionales a $\frac{R}{\|R\|}$;
until $false$;

Algorithm 2: Algoritmo de *regret matching*

Equilibrio en juegos repetidos

Al contrario que lo que ocurre con los juegos dinámicos finitos, en los juegos repetidos no podemos inducir una forma normal, por lo que recurrir al Teorema de Nash 3.0.3 para decir que existe al menos un equilibrio no es viable. El equilibrio de Nash como tal solo se aplica en juegos finitos.

Además, en el análisis de los juegos dinámicos finitos se asume que el objetivo de cada jugador es maximizar el valor esperado de la utilidad que obtiene **al final del juego**. En los juegos repetidos, al permitir un horizonte temporal infinito, se debe abandonar esta suposición dado que no se dispone de certidumbre total sobre el final del juego. En su lugar, se supone que los jugadores obtienen una recompensa tras cada ronda del juego, recibiendo una secuencia de pagos.

Para establecer una equivalencia entre el equilibrio de Nash y los juegos repetidos se recurre al conocido como **Teorema de tradición oral** [20]. Para ello veamos primero algunas consideraciones. Consideramos el juego estratégico $\Gamma = (N, A, u)$, un *escenario* del juego repetido o *stage game*, que se va a repetir, y el vector de pagos $r = (r_1, r_2, ..., r_n)$, donde r_i es la sucesión de pagos correspondiente a i. Sea

$$v_i = \min_{s_{-i} \in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} u_i(s_{-i}, s_i)$$

el **valor minmax** del jugador i, la cantidad de utilidad que i obtiene cuando los jugadores en $-i$ juegan una *estrategia minmax*[8] contra él.

[8]Estas estrategias son importantes en juegos de suma cero. Se trataron en el capítulo de juegos dinámicos.

Definición 6.0.5 — Perfil de pagos ejecutable.

Un perfil de pagos r es **ejecutable** (*enforceable*) si $r_i \geq v_i \quad \forall i \in N$.

Definición 6.0.6 — Perfil de pagos factible.

Un perfil de pagos r es **factible** (*feasible*) si existen valores racionales no negativos α_a de tal manera que para todo i, podamos expresar r_i como $\sum_{a\in A} \alpha_a u_i(a)$, con $\sum_{a\in A} \alpha_a = 1$. Es decir, se puede escribir como una combinación convexa de las utilidades del juego.

A continuación se presenta un ejemplo para ver que significa que un perfil de pagos sea *factible*. Considérese el siguiente juego escenario con matriz de pagos

$$\begin{pmatrix} (2,0) & (0,0) \\ (0,0) & (0,2) \end{pmatrix}.$$

El perfil de pagos $(1,1)$ es *factible* ya que se tiene que podemos escribir $(1,1) = 0.5 \cdot (2,0) + 0 \cdot (0,0) + 0 \cdot (0,0) + 0.5 \cdot (0,2)$. Sin embargo el perfil de pagos $(2,2)$ no lo es ya que no existe forma de escribirlo como combinación normalizada de los pagos de la matriz.

Bajo estas condiciones se tiene,

Teorema 6.0.4 — Teorema de tradición oral - *Folk theorem*.

Considere cualquier juego de n jugadores Γ y cualquier vector de pagos $(r_1, ..., r_n)$.

1. Si r es el pago en cualquier equilibrio de Nash de la versión infinitamente repetida de Γ, entonces para cada jugador i, r_i es **ejecutable**.
2. Si r es **factible** y **ejecutable**, entonces r es el pago en algún equilibrio de Nash de la versión infinitamente repetida de Γ.

Demostración. La idea de la demostración se puede encontrar en [20]. Para ver la demostración detallada acudir a [9]. ∎

Para el estudio del equilibrio en juegos repetidos tenemos que diferenciar si se dispone de un estado de la naturaleza absorbente en el juego:

- El juego tiene un **estado de la naturaleza absorbente**.

En este caso, para determinar los objetivos de los jugadores se recurre al **criterio de la suma de los pagos**. El objetivo de cada jugador es maximizar la suma esperada de las utilidades que recibe en cada ronda. Con el criterio de la suma de los pagos se puede considerar que un *equilibrio* es un perfil estratégico de comportamiento σ tal que, para todo jugador $i \in N$ y para todo perfil $\hat{\sigma}_i \in B_i$, se tiene

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d \in D} \sum_{\theta \in \Theta} P^k(d, \theta|_{\sigma}) u_i(d, \theta) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d \in D} \sum_{\theta \in \Theta} P^k(d, \theta|_{\sigma_{-i}, \hat{\sigma}_i}) u_i(d, \theta).$$

- El juego **no** tiene un **estado de la naturaleza absorbente**.

Desafortunadamente, si no existe un estado absorbente para en el que se espera acabar el juego en tiempo finito, la suma esperada de las utilidades puede ser infinita para todos los perfiles de comportamiento, así que no se podría aplicar el criterio de la suma de los pagos. En su lugar se recurre al **criterio del $\delta-$descuento medio**.

Dado un valor $0 \leq \delta < 1$, conocido como el *factor descuento*, el **$\delta-$descuento medio** de una secuencia de pagos $(r_i(1), r_i(2), ...)$ es

$$(1 - \delta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} r_i(k).$$

O Si $r_i(k)$ es una constante se tiene que $(1-\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} = 1$.
También es usual emplear la notación $\sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k-1} r_i(k)$, que no estaría normalizada.

Para cualquier juego repetido general, si los pagos están acotados, entonces el $\delta-$descuento medio de la secuencia de pagos para cada jugador está acotado por el mismo número que acota los pagos. Por lo tanto, podemos aplicar de manera más general el criterio de promedio con descuento δ y asumir que el objetivo de cada jugador es maximizar el promedio esperado del $\delta-$descuento medio de su secuencia de pagos. Con el criterio, un perfil de estrategia de comportamiento σ es un *equilibrio* si y solo si para cada jugador i y cada estrategia de comportamiento $\hat{\sigma}_i$

$$(1-\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d \in D} \sum_{\theta \in \Theta} P^k(d, \theta|_{\sigma}) \delta^{k-1} u_i(d, \theta) \geq (1-\delta) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{d \in D} \sum_{\theta \in \Theta} P^k(d, \theta|_{\sigma_{-i}, \hat{\sigma}_i}) \delta^{k-1} u_i(d, \theta).$$

En general, el factor de descuento δ representa una medida de la **paciencia** o la **perspectiva a largo plazo** de los jugadores. Si δ es cernano a 0, entonces el criterio del $\delta-$descuento medio da mayor peso a los pagos que los jugadores obtienen en las primeras rondas, por lo que es más apropiado para los jugadores *impacientes* o aquellos principalmente preocupados por su situación de futuro cercano.

Siguiendo con el ejemplo 6.2, el análisis en 3.8 reveló que si se juega una ronda del *Dilema del Prisionero* el único equilibrio del juego estratégico es $(Confesar, \ Confesar)$, cada jugador elige el movimiento egoísta.

Supóngase ahora que se permite jugar repetidamente al *Dilema del Prisionero*. Se ha visto que el juego tiene un estado absorbente $\theta = 0$. Consideremos la variable aleatoria

$$X = \text{ disputar partidas hasta que el juego llegue a su fin.}$$

Se tiene que $X \sim Ge(p)$. Si se espera disputar unas 100 partidas entonces se tendrá que $p = 0.01$.[9] Por lo que tendremos que, $P[X = k] = (0.99)^{k-1}(0.01)$.

Si los jugadores no se desvían de su movimiento generoso, es decir, juegan la estrategia $D^\infty = (No\ confesar^\infty, \ No\ confesar^\infty)$, el pago esperado para cada jugador es

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[X = k] \ u_i(D^\infty) = \sum_{k=1}^{\infty}(0.99)^{k-1}(0.01)(5k) = 500.$$

Considérese ahora la siguiente estrategia de gatillo:

Tr(C) = Jugar $No\ confesar$ hasta que alguien juegue $Confesar$ y luego cambiar a $Confesar$.

En este caso el pago esperado para cada jugador a partir de la ronda en que se desvían es

$$\underbrace{6}_{\text{ronda del desvío}} + \sum_{k=2}^{\infty}(0.99)^{k-1}(0.01)(1k) = 105.$$

O Véase que la expresión anterior es de la forma $\sum_{t=1}^{\infty} \delta^{t-1}\pi_t$.
Si π_t es una constante entonces: $\pi + \delta\pi + \delta^2\pi + \delta^3\pi + ... = \pi\frac{1}{1-\delta}$.

Obsérvese que una vez que alguien cambie su elección a $Confesar$ nadie querrá retomar de nuevo la alternativa $No\ confesar$. Así, si los jugadores supiesen cuando el juego acaba el único equilibrio secuencial es jugar $(Confesar, \ Confesar)$, el movimiento egoísta. El razonamiento tras esta conclusión es el siguiente:

1. Si nos detenemos a observar la última ronda la estrategia con la que conseguimos mayor utilidad es jugar g_i hasta la penúltima ronda y luego cambiar a f_i, obteniendo en la última ronda un pago de 6 en vez de 5.
2. Como nuestro rival es racional e inteligente cambiará una ronda antes que nosotros.

...

(Inducción hacia atrás)

[9] Recuérdese, en una distribución geométrica $Ge(p)$ se tiene que $P[X = x] = (1-p)^{(x-1)}p$ y $E[X] = \frac{1}{p}$.

Finalmente, el equilibrio se alcanza el equilibrio (f_1, f_2).

Se observa que jugar la estrategia D^∞ proporciona mayor utilidad que $Tr(C)$ o cualquier otra, pero esto depende de si nuestro rival esta dispuesto a cooperar, ser generoso, o no. Para analizar cuando es mejor una estrategia u otra podemos recurrir al análisis del juego con el **factor descuento**.

La utilidad descontada para el jugador i al usar las estrategias anteriores sería,

$$\begin{aligned} u_i(D^\infty) &= 5 + 5\delta + 5\delta^2 + 5\delta^3 + ... = \frac{5}{1-\delta}, \\ u_i(Tr(C)) &= 6 + \delta + \delta^2 + \delta^3 + ... = 6 + \frac{\delta}{1-\delta}. \end{aligned}$$

Luego el jugador i prefiere ser generoso si

$$\begin{aligned} u_i(D^\infty) &> u_i(Tr(C)) \\ \frac{5}{1-\delta} &> 6 + \frac{\delta}{1-\delta} \\ \delta &> \boxed{\frac{1}{5}}. \end{aligned}$$

Otros modelos

Un juego repetido se dice que tiene **información completa sobre los estados** si y solo si en cada ronda cada jugador conoce el estado de la naturaleza actual. En un juego con información completa sobre los estados, una estrategia de comportamiento se dice **estacionaria** si las probabilidades de movimiento dependen solo del estado actual.

Un juego repetido con **información estándar**, juego repetido estándar o *superjuego*, es aquel en el que solo existe un posible estado de la naturaleza y los jugadores conocen todos sus pasados movimientos. Es decir, en un juego repetido estándar $|\Theta| = 1$, $S_i = \times_{j\in N} D_j$ para cada i y $p(d, ..., d, \theta|_{d,\theta}) = 1$, $\forall d \in D$. Estos juegos representan situaciones en las que un grupo de individuos se enfrenta exactamente a la misma situación competitiva infinitamente a menudo y siempre tienen información completa sobre el comportamiento pasado del otro.

Juegos estocásticos

Intuitivamente hablando, un **juego** estocástico modela situaciones en las que en lugar de un juego (*escenario*), hay una colección de juegos y los jugadores juegan repetidamente juegos de esta colección. La transición de un juego actual a otro depende probabilísticamente de las acciones tomadas en el juego actual. El *torneo de póker* es un ejemplo de juego estocástico.

Definición 6.0.7 — Juego estocástico.

Un **juego estocástico** es una tupla (N, Θ, A, P, R) donde,

- N es el conjunto de n jugadores.
- Θ es el conjunto posibles **juegos** o *estados*.
- $A = A_1 \times ... \times A_n$, donde A_i es el conjunto finito de acciones disponibles para i.
- $P : \Theta \times A \times \Theta \longrightarrow [0, 1]$ es la **función de transición**. $P(\theta, a, \hat{\theta})$ es la probabilidad de pasar de un estado θ a otro estado $\hat{\theta}$ habiendo usado la acción a.
- $R = (r_1, ..., r_n)$, donde $r_i : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ es el pago que recibe el jugador i cuando se alcanza el estado θ.

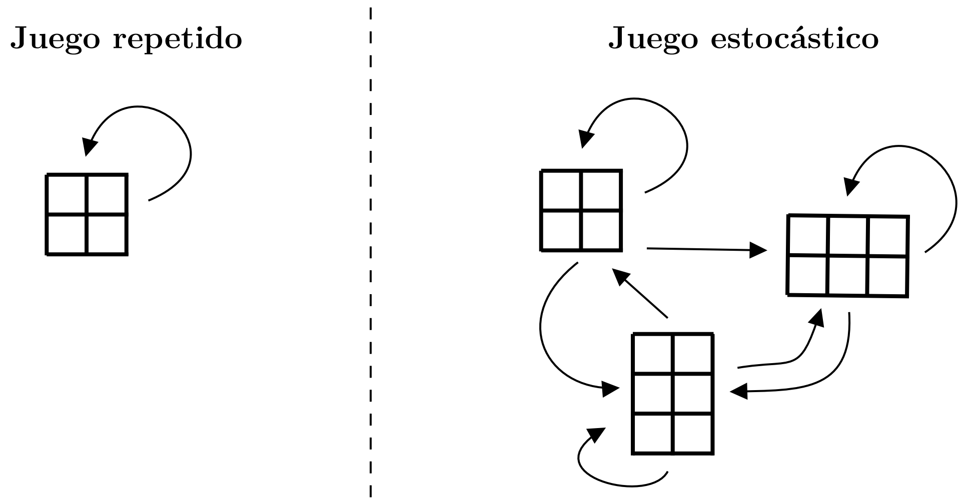


Figura 6.3: Visualización de las diferencias entre juegos repetidos y estocásticos

El talento ganan juegos, pero el trabajo en equipo y la inteligencia gana campeonatos.

Michael Jordan

7
Juegos cooperativos

Comunicación entre jugadores

Imagine la siguiente situación.

■ **Ejemplo 7.1 — Juego del examen.**

Dos amigos tienen que presentarse a un examen. Por la razón que sea, no les ha dado tiempo a estudiar y deciden poner como excusa al profesor que se les ha pinchado la rueda de la moto y que no pudieron llegar a tiempo. El profesor, muy amablemente, decide posponer el examen al día siguiente.

Los alumnos estudian para el día siguente. Cuando van a hacer el examen el profesor separa a los alumnos colocando a cada uno en un aula. La primera pregunta del examen es: *¿Qué rueda de la moto se pinchó?*[a]

Las posibles alternativas son elegir la de *delante* o la de *atrás*[b]. Si ambos coinciden en su respuesta el examen se corregirá y no habrá problema. Si dan una respuesta descoordinada tienen un suspenso en la evaluación. ■

[a] Variantes más complejas de este juegos incluyen una pregunta con más alternativas, por ejemplo preguntar a uno de ellos de que color tenía su camiseta y al otro preguntarle por el color de la camiseta de su compañero, o incluso en lugar de una cuestión añadir varias preguntas con el mismo objetivo.

[b] En este ejemplo puede que la opción más plausible sea ambos elegir *delante* ya que si vas por un camino la primera rueda que se encuentra el obstáculo es la delantera. Otras versiones del juego cambian la moto por un coche, teniendo que elegir entre rueda *izquierda* y *derecha*.

Este juego es similar al *juego del lado de la carretera* 3.2, el cual ya se clasificó como juego de coordinación en el capítulo de juegos estratégicos.

Una posible matriz de pagos para describir la forma normal del juego es la siguiente:

	Delante	*Atrás*
Delante	$\underline{1},\underline{1}$	0,0
Atrás	0,0	$\underline{1},\underline{1}$

Tabla 7.1: Forma normal juego examen

Se puede obervar en la Tabla 7.1 que hay dos equilibrios puros $(Delante, Delante)$ y $(Atrás, Atrás)$, ambos son mejores respuestas y en caso de darse nadie se arrepentiría de su decisión. Hay otro equilibrio en estrategias mixtas, aunque este no es relevante ahora para nuestro planteamiento.

El problema que subyace en este juego es el de la **comunicación entre jugadores**. Si la comunicación entre los jugadores se permite de alguna forma, se puede llegar a un acuerdo y elegir la alternativa que mayor utilidad aporte a los jugadores, se obtiene beneficio de la **coordinación**. Si dicha comunicación está vetada, existe cierta incertidumbre que dificulta la elección de estrategias puras teniendo que recurrir a estrategias mixtas (interpretación del equilibrio mixto como aleatorización ante la duda sobre la acción del oponente).

Esta es una forma de cooperar entre jugadores, en el sentido estricto de la palabra, que basa su análisis en métodos de juegos no cooperativos. **No** será la forma de cooperación de la que nos ocuparemos en adelante en este capítulo, de ahí que estos juegos reciban el nombre de *juegos de coordinación* y no de *cooperación* o de *coalición* como se verá en lo sucesivo.

Coaliciones

Al contrario que los juegos no cooperativos, que se pueden interpretar como generalización de los juegos bipersonales, la teoría de juegos cooperativos se centra mayoritariemente en los logros que pueden alcanzar un grupo de agentes, denominados *coaliciones*.

Según el *Diccionario de la Real Academia Española* [21],

> **Coalición**: *unión transitoria de personas, grupos políticos o países con un interés determinado.*

Formalmente,

Definición 7.0.1 — Coalición.

Dado un conjunto $N = \{1, 2, ..., n\}$ de jugadores, la posibles **coaliciones** de N son los conjuntos no vacíos $S \subseteq N$, siendo $|S|$ el número de jugadores que forman parte de esa coalición.

Dado un conjunto de agentes, no se tiene en cuenta cómo los agentes toman decisiones individuales dentro de una coalición o cómo se coordinan, nos centramos en qué tan bien puede hacer cada coalición de agentes por sí misma, cómo se forman o como repartir los beneficios que se generan de dicha unión.

Por lo tanto, las soluciones ahora son reglas para elegir cómo asignar la utilidad de acuerdo con algunos conceptos como justicia o equidad que no hemos introducido hasta ahora.

En teoría de juegos cooperativos se emplea el concepto de *asignación*,

Definición 7.0.2 — Asignación o configuración de pagos.

Una **asignación** o **configuración de pagos** es el vector $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ donde x_j representa el pago para cada jugador $j \in N$.

Nótese que $\mathbb{R}^{|S|}$ es el conjunto de posibles resultados que los jugadores en una coalición S pueden obtener por sí mismos[1].

A modo de ilustración considérese el siguiente ejemplo explicado en [22].

■ **Ejemplo 7.2 — Juego bidimensional del reparto del dolar.**

Imagínese que hay dos personas (*Alice* y *Bob*) a las que se les proporciona 1\$ si y solo si pueden llegar a un acuerdo sobre como repartirlo. ■

Al *negociar* hay un conjunto de todos los resultados de los posibles acuerdos. En este caso,

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x, y \geq 0, \ x + y \leq 1\},$$

donde x e y son los pagos que reciben 1 y 2 respectivamente.

El **Teorema de Coase**, véase [23], establece que un acuerdo racional será un par (x^*, y^*) en la frontera del conjunto, es decir un par de números no negativos (x^*, y^*) tal que $x^* + y^* = 1$, naturalmente, ya que para cualquier otro punto (x', y') que no esté en la frontera (i.e. $x' + y' < 1$) existe un $\delta > 0$ tal que $x' + y' = 1 - \delta$ y, por lo tanto, $(x' + \frac{\delta}{2}, y' + \frac{\delta}{2})$ es un acuerdo que ambos jugadores preferirían.

La forma en que se construye la negociación, y la capacidad de negociación de cada jugador, determinará de qué manera se dividirá el dólar, pero la división más justa sería que cada jugador obtuviera 0.5\$. También está bastante claro que una vez que los dos jugadores hayan acordado esa división no se moverán de ella, por lo tanto $(0.5, 0.5)$ es *estable*.

Supóngase que un tercer jugador, llamado *Charles*, ve como se reparten el dólar entre *Alice* y *Bob* y se une al juego. El reparto más *equitativo* sería $(1/3, 1/3, 1/3)$. Pero, ¿qué ocurriría si permitimos que los jugadores lleguen a acuerdos entre ellos?, es decir se permite la formación coaliciones. Todo el funcionamiento del juego cambia, como veremos en las siguientes secciones, la función característica que define cada juego es diferente.

[1]Se cometerá abuso de notación a menudo al emplear S para denotar |S|.

Para empezar, no todos los jugadores tienen que recibir una fracción del reparto. Si el jugador 1 propusiera una división $(1/3, 1/3, 1/3)$, el jugador 2 podría ofrecerle un $(1/2, 1/2, 0)$ que ambos preferirían. Sin embargo, el jugador 3 podría ofrecer un preferible $(3/5, 0, 2/5)$ al jugador 1, que podría seguirse por un $(4/5, 1/5, 0)$ y luego los jugadores 2 y 3 podrían acordar un $(0, 1/2, 1/2)$, que nos llevaría de regreso al comienzo del juego, o una situación equivalente, desde donde podríamos continuar sin parar.

Por lo tanto, podemos ver que aunque hay, de hecho, una solución *justa* en este juego, ya sea que lo estén jugando dos o tres jugadores, no siempre tal solución, o cualquier otra, es *estable* para $n = 3$.

Concepto de utilidad transferible

La utilidad es **transferible** si un jugador puede transferir sin pérdida parte de su utilidad a otro jugador. Se ha de tener en cuenta que poder transferir pagos en efectivo no implica que la utilidad sea transferible: los jugadores ricos y pobres pueden obtener una utilidad diferente de la misma cantidad de dinero.

La utilidad transferible se supone en muchos juegos cooperativos, donde los pagos se otorgan a coaliciones. En este caso, la suposición implica que, independientemente de la división del pago de la coalición, los miembros de la coalición disfrutan de la misma utilidad total.

Dependiendo de si las transferencias de utilidad entre jugadores están restringidas o no, debemos distinguir entre juegos de **utilidad transferible** (*juegos TU*) y juegos de **utilidad no transferible** (*juegos NTU*).

Dada la extensión del proyecto, centramos principalmente la atención en los juegos de utilidad transferible mostrándose las principales definiciones sobre juegos de utilidad no transferible. Además, se emplean conjuntamente los paquetes `GameTheory` [24] y `CoopGame` [4] de **R** para plantear y resolver los ejemplos que se proponen.

Juegos de utilidad transferible

Los **juegos de utilidad transferible** surgen de la necesidad de estudiar situaciones que posibilitan la formación de coaliciones con capacidad de alcanzar alternativas factibles sin el consentimiento unánime de todos los jugadores de la coalición.

En estas circunstancias se entiende que al (re)distribuir las ganancias obtenidas entre los miembros de una coalición es posible que unos jugadores decidan compensar a otros por posibles renuncias de estos en su ganancia individual en pos de la obtención de un mayor beneficio común. Estas compensaciones, conocidas como **pagos laterales**, se efectúan mediante *transferencias de utilidad*, de ahí la denominación de estos juegos. Esta posibilidad de redistribución del beneficio obtenido implica, además, que un **único número real** pueda describir todas la alternativas posibles para una coalición.

Definición 7.0.3 — Juego cooperativo de utilidad transferible - *Juego TU*.

Un **juego TU** es un par (N, v) donde:

- N es el conjunto de jugadores
- $v : 2^N \to \mathbb{R}$ es una función, denominada **función característica** del juego, que asigna a cada coalición $S \subseteq N$ un número real $v(S) \in \mathbb{R}$ como pago a la coalición. Se asume que v satisface $v(\emptyset) = 0$.

N Se denota por $\mathcal{G}^{TU}$ la clase de juegos de utilidad transferible y por $\mathcal{G}_N^{TU}$ la clase de juegos de utilidad transferible con N como conjunto de jugadores.

Si no hay confusión se suele emplear la notación $v \in \mathcal{G}^{TU}$ en lugar de (N, v).

La coalición formada por todos los agentes en N se denomina **gran coalición** siendo el análisis de esta el objetivo de muchos métodos.

Definición 7.0.4 — Juego superaditivo.

Un juego $(N, v) \in \mathcal{G}^{TU}$ es **superaditivo** si, para todo $S, T \subset N$ con $S \cap T = \emptyset$,

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T).$$

N Se denota por $\mathcal{SG}^{TU}$ a la familia de juegos TU superaditivos.

La propiedad de *superaditividad* en un juego es la que proporciona a los jugadores un **incentivo para cooperar** en el sentido de que la unión de dos grupos cualesquiera, disjuntos, nunca disminuye los benecios. De hecho, gran parte de la teoría de juegos TU se ha desarrollado pensando en juegos superaditivos, aunque por simplicidad se presente formulada para la clase completa.

■ **Ejemplo 7.3 — Juego reparto de un millón.**

Este juego es la generalización del *juego repato del dolar* 7.2. El enunciado es el siguiente:

Una persona deja una herencia de un millón de euros a tres herederos con la condición de que al menos dos de ellos lleguen a un acuerdo sobre cómo efectuar el reparto, porque en otro caso lo donará a una institución. ■

Este es un ejemplo de juego TU **simétrico**.

Esta situación se puede modelizar como un juego TU siguiendo 7.0.3 de la siguente forma[2].

$$\begin{gathered} N = \{1,2,3\} \\ v(1) = v(2) = v(3) = 0 \\ v(1,2) = v(1,3) = v(2,3) = v(N) = 1 \end{gathered}$$

Para dar una estructura de juego TU en el paquete `GameTheory` basta dar el vector de los valores de la función característica ordenados y llamar a la función `DefineGame()` que recibe como argumentos $|N|$ y el vector de valores.

```r
library(GameTheory)
coaliciones_reparto <- c(0,0,0,1,1,1,1)
juego_reparto       <- DefineGame(3,coaliciones_reparto)
summary(juego_reparto)
```

```
###
### Characteristic form of the game
###
### Number of agents: 3
###
### Coaliton Value(s)
###
###     Value
### 1       0
### 2       0
### 3       0
### 12      1
### 13      1
### 23      1
### 123     1
```

El paquete `CoopGame` incluye una función `divideTheDollarGame` para la que es suficiente indicar el número de jugadores, aunque también permite definir un juego TU desde un vector característico de forma sencilla.

```r
library(CoopGame)
divideTheDollarGame(3)
```

[2] Para evitar complicar la notación se escribe $v(i)$ en lugar de $v(\{i\})$ e igual con el resto de conjuntos.

■ **Ejemplo 7.4 — Juego del guante.**

Tres jugadores están dispuestos a repartir los beneficios derivados de la venta de pares de guantes. El jugador 1 tiene un par izquierdo mientras que los jugadores 2 y 3 tienen un par derecho cada una. Solo se puede vender el guante como pareja. ■

$$N = \{1,2,3\}$$
$$v(1) = v(2) = v(3) = v(2,3) = 0$$
$$v(1,2) = v(1,3) = v(N) = 1$$

```
library(GameTheory)
coaliciones_guante <- c(0,0,0,1,1,0,1)
juego_guante       <- DefineGame(3,coaliciones_guante)
summary(juego_guante)
```

```
###
### Characteristic form of the game
###
### Number of agents: 3
###
### Coaliton Value(s)
###
###     Value
### 1       0
### 2       0
### 3       0
### 12      1
### 13      1
### 23      0
### 123     1
```

El paquete `CoopGame` incluye otra función `gloveGame` que recibe como argumentos `n` número de jugadores, `L` y `R` que especifica que jugadores poseen par izquierdo o derecho.

```
library(CoopGame)
gloveGame(n=3,L=1,R=c(2,3))
```

```
### $n
### [1] 3
###
### $L
### [1] 1
###
### $R
### [1] 2 3
###
### $v
### [1] 0 0 0 1 1 0 1
```

Un concepto útil en los juegos TU es la **matriz de bits**. Las matrices de bits asignan inequívocamente los valores de las subcoaliciones a los jugadores de esa subcoalición.

```
library(CoopGame)
createBitMatrix(n=3,coaliciones_guante)
```

```
###              cVal
### [1,] 1 0 0    0
### [2,] 0 1 0    0
### [3,] 0 0 1    0
### [4,] 1 1 0    1
### [5,] 1 0 1    1
### [6,] 0 1 1    0
### [7,] 1 1 1    1
```

Otra funcionalidad del paquete `CoopGame` es que nos permite ver si los juegos cumplen una serie de propiedades entre las que se encuentra comprobar la *superaditividad*.

```
library(CoopGame)
isSuperadditiveGame(coaliciones_reparto)
```

```
### [1] TRUE
```

```
isSuperadditiveGame(coaliciones_guante)
```

```
### [1] TRUE
```

Ambos juegos son superaditivos.

A continuación se presenta una familia de juegos que cumple muchas de las propiedades que se plantean en las secciones siguientes.

Definición 7.0.5 — Juego monótono.

Un juego $(N, v) \in \mathcal{G}^{TU}$, o su función característica v, se dice **monótono** si para cada par de coaliciones $S, T \subset N$ tal que $S \subset T$ se tiene que $v(S) \leq v(T)$.

Definición 7.0.6 — Juego simple.

Un juego $(N, v) \in \mathcal{G}^{TU}$ es **simple** si satisface las siguientes condiciones:

- v es monótona.
- $v(S) \in \{0, 1\}$ $\forall S \subset N$.
- $v(N) = 1$.

Tanto el *juego del reparto* 7.3 como el *juego del guante* 7.4 son ejemplos de juegos simples.

Se puede comprobar si las propiedades anteriores se cumplen haciendo uso el paquete `CoopGame`.

```
#Se comprueba solo para el juego del guante.
library(CoopGame)
isMonotonicGame(coaliciones_guante)
```

```
### [1] TRUE
```

```
isSimpleGame(coaliciones_guante)
```

```
### [1] TRUE
```

Otras funciones son `isAdditiveGame`, `isSymmetricGame` ó `isConvexGame` entre otras.

Soluciones

Se entiende por solución de un juego con utilidad transferible a toda regla de asignación que determine un reparto del total.

Una primera aproximación se basa en la idea de **estabilidad**: tratar de encontrar un conjunto de asignaciones que sea *estable* en el sentido de que cabe esperar que el acuerdo que alcanzan los jugadores sea un elemento de dicho conjunto. Esta es la idea presente por ejemplo en el *núcleo* (Gillies 1953), los *conjuntos estables* (Von Neumann y Morgenstern 1944) y el *conjunto de negociación* (Aumann y M. Maschler 1964).

La segunda aproximación está basada en la idea de **justicia**: trata de proponer para cada juego TU una asignación que representa un compromiso justo para los jugadores. Esta es la idea subyacente en el *valor de Shapley* (Shapley 1953), el *nucleolo* (Schmeidler 1969) y el *τ-value* (Tijs 1981).

Nos ocupamos de los dos métodos más relevantes: el **núcleo** y el **valor de Shapley**.

El núcleo

Para cada juego TU, el núcleo es un subconjunto del conjunto de imputaciones del juego, donde una imputación es una división de $v(N)$ entre todos los jugadores de forma que ningún jugador reciba menos que la cantidad, $v(i)$, que puede garantizarse por sí mismo.

Definición 7.0.7 — Imputación.

Dado un juego $(N, v) \in \mathcal{G}^{TU}$ se dice que un vector $x \in \mathbb{R}^N$ es una **imputación** si satisface las siguientes condiciones:

- Es **eficiente**: $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.
- Es **individualmente racional**: $x_i \geq v(\{i\})$, $\forall i \in N$.

N Dado un juego $(N, v) \in \mathcal{G}^{TU}$ se denota por $I(N, v)$ el conjunto de imputaciones del juego.

Proposición 7.0.1 — Conjunto de imputaciones.

El conjunto de imputaciones de cualquier juego superaditivo es no vacío.

Demostración. Véase [22]. ∎

Definición 7.0.8 — Núcleo - *Core*.

Se define el **núcleo** de un juego (N, v) por el conjunto:

$$C(N, v) = \Big\{ x \in I(N, v) : \ \forall S \subseteq N, \sum_{i \in S} \geq v(S) \Big\}.$$

Es decir, la suma de los pagos a los agentes de cualquier subcoalición es al menos tanto como lo que pueden ganar por ellos mismos. El concepto de núcleo es análogo al de *equilibrio de Nash* excepto porque permite desviaciones entre un grupo de agentes.

Obsérvese que se cumple $C(N, v) \subset I(N, v)$. El núcleo puede ser vacío y no tiene porque ser único. En los juegos simples se da el siguiente resultado.

Definición 7.0.9 — Jugador con veto.

Dado un juego simple, un jugador $i \in N$ es un **jugador con veto** si $v(N \setminus \{i\}) = 0$. Es decir, la participación de i es necesaria para que la coalición pueda producir algún beneficio.

En el *juego del guante* 7.4 el jugador 1 es un jugador con veto.

Teorema 7.0.2

Sea (N, v) un juego simple, $C(N, v) \neq \emptyset \iff$ existe al menos un jugador con veto en el juego.

Demostración. Por reducción al absurdo suponemos que en (N, v) no hay jugador con veto. Entonces se tiene que $v(N \setminus \{i\}) = 1, \ \forall i \in N$. Así, $v(N) = v(N \setminus \{i\})$ y para cualquier asignación $x \in C(N, v)$,

$$0 = v(N) - v(N \setminus \{i\}) \geq \sum_{j \in N} x_j - \sum_{j \in N \setminus i} x_j = x_i \geq 0.$$

lo que nos lleva a que $x_i = 0, \ \forall i \in N$ y por lo tanto se llega a una contradicción, no se cumple la condición de eficiencia sobre la asignación x. ∎

Corolario 7.0.3

Si el núcleo de un juego simple (N, v) cumple $C(N, v) \neq \emptyset$ entonces,

$$C(N, v) = \Big\{ x \in I(N, v) : \text{para cada jugador } \textbf{sin} \text{ veto } j \in N, \ x_j = 0 \Big\}.$$

Ejercicio 7.1 Cálculo del núcleo del *juego del reparto* 7.3 y del *juego del guante* 7.4. ■

El núcleo del juego de repartir un millón es vacío, a pesar de que es un juego superaditivo. Esto quiere decir que la situación de negociación modelada por este juego es fuertemente inestable.

Recurriendo al paquete `CoopGame` se puede observar los vértices que forman el núcleo, que como es vacío no devolverá ningún resultado.

```
library(CoopGame)
coreVertices(coaliciones_reparto)
```

```
###      [,1] [,2] [,3]
```

El núcleo del juego del guante es el punto $\{(1,0,0)\}$. La interpretación que se puede hacer de este resultado es que el precio de los guantes derechos en el mercado es cero ya que hay demasiados disponibles.

```
library(CoopGame)
coreVertices(coaliciones_guante)
```

```
###      [,1] [,2] [,3]
### [1,]    1    0    0
```

Veamos un ejemplo donde el núcleo aporte mayor información.

■ **Ejemplo 7.5**

Considérese el juego (N,v) con $N=\{1,2,3\}$ y función característica

$$v(1)=0,\ v(2)=0,\ v(3)=0,\ v(1,2)=15,\ v(1,3)=5,\ v(2,3)=5,\ v(1,2,3)=20.$$

■

El núcleo de este juego vendrá dado por el siguiente subconjunto de imputaciones:

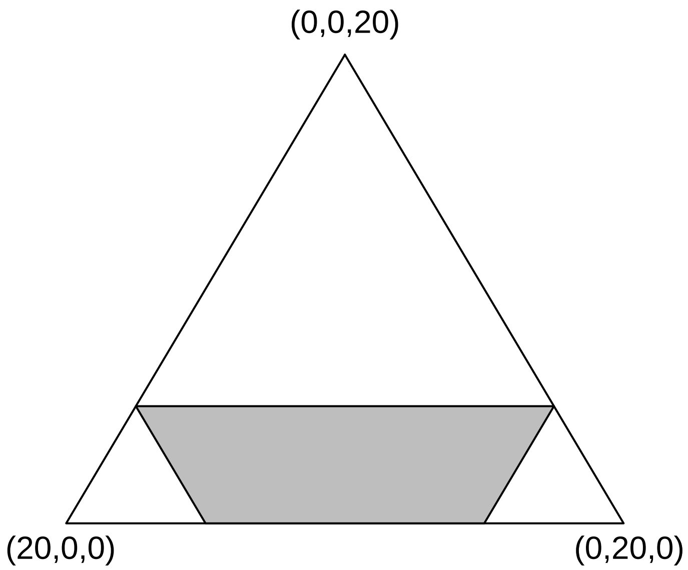
$$C(N,v)=\Big\{x\in I(N,v): x_1+x_2\geq 15,\ x_1+x_3\geq 5,\ x_2+x_3\geq 5\Big\}$$

Con el paquete `CoopGame` se puede calcular los vértices del núcleo y representar tanto el conjunto de imputaciones como el núcleo (parte sombreada).

```
library(CoopGame)
v <-c(0,0,0,15,5,5,20)
coreVertices(v)
```

```
###      [,1] [,2] [,3]
### [1,]   15    5    0
### [2,]   15    0    5
### [3,]    0   15    5
### [4,]    5   15    0
```

```
drawImputationset(v)
drawCore(v, holdOn=TRUE, colour="grey")
```



Incluso se puede comprobar si un vector pertenece al núcleo.

```
belongsToCore(c(15,5,0),v)
```

```
### [1] TRUE
```

```
belongsToCore(c(1,1,0),v)
```

```
### [1] FALSE
```

El valor de Shapley

La idea de Lloyd Shapley era que los miembros deben recibir asignaciones proporcionales a su contribución marginal, la fracción que reciban debe estar en concordancia con su valor añadido a la coalición, lo que aporta a esta.

Pero esta idea no siempre es fácil de aplicar a la realidad.

Ejemplo 7.6 — Juego simple.

- Supóngase que $v(N) = 1$ pero $v(S) = 0$ si $N \neq S$, es decir que si la coalición está formada por todos los agentes puede generar 1 unidad de beneficio pero si algún miembro de la coalición no participa no se gana nada.
- En este caso se tiene que la contribución marginal de cada jugador es

$$v(N) - v(N \setminus \{i\}) = 1,$$

  por lo que todos los agentes de la coalición son esenciales.

No se puede pagar a los jugadores su contribución marginal. ■

Para definir un sistema de pesos que permita desarrollar la idea anterior se recurre a los **axiomas de Shapley**.

Definición 7.0.10 — Jugador nulo o dummy.

En un juego (N, v) se dice que $i \in N$ es un **jugador nulo** si la aportación del jugador a la coalición es nula, es decir, para cada $S \subset N$, $v(S) = v(S \cup \{i\})$.

Definición 7.0.11 — Jugadores simétricos o intercambiables.

En un juego (N, v) se dice que $i, j \in N$ son **jugadores simétricos o intercambiables** si los jugadores aportan lo mismo a la coalición y por lo tanto se pueden sustituir, es decir, para cada $S \subset N \setminus \{i, j\}$, $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$.

Definición 7.0.12 — Axiomas de Shapley.

Sea (N, v) un juego TU y φ una asignación de pagos a los jugadores.

1. **Eficiencia (EFF)**.

La suma de la recompensa de cada jugador es igual a $v(N)$, i.e. $\sum_{i \in N} \varphi_i(N, v) = v(N)$.

2. **Propiedad del jugador nulo (NULL)**.

Para $i \in N$ *jugador nulo* se cumple $\varphi_i(N, v) = 0$.

3. **Simetría (SYM)**.

Para $i, j \in N$ *jugadores simétricos* se cumple $\varphi_i(N, v) = \varphi_j(N, v)$.

4. **Aditividad (ADD)**.

Para cada par de juegos (N, v) y (N, w) se cumple que para cada $i \in N$

$$\varphi_i(N, v + w) = \varphi_i(N, v) + \varphi_i(N, w),$$

donde el juego $(N, v + w)$ viene definido por $(v + w)(S) = v(S) + w(S)$ para cada coalición S.

Teorema 7.0.4 — Valor de Shapley.

Dado un juego (N, v), el **valor de Shapley** es la única regla de asignación de pagos que satisface *EFF*, *NULL*, *SYM* y *ADD*.

Demostración. La demostración es directa viendo que se cumplen las condiciones de 7.0.12. Para mayor detalle ver [25]. ∎

Dado un juego (N, v) el **valor de Shapley** divide los pagos entre los jugadores de la coalición según la expresión:

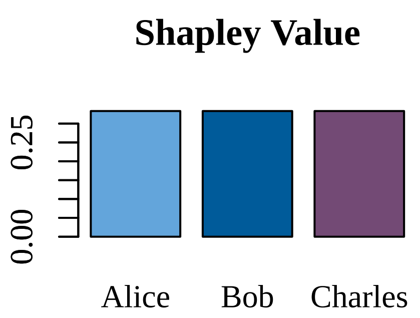
$$\varphi_i(N, v) = \frac{1}{|N|!} \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} |S|!(|N| - |S| - 1)! \Big[\underbrace{v(S \cup \{i\}) - v(S)}_{\text{contribución marginal}} \Big].$$

Además, los cuatro axiomas utilizados para caracterizarlo no son imprescindibles, eliminar cualquiera de ellos deja espacio para otras reglas de asignación como la *regla de división equitativa* $\psi_i(N, v) = \frac{V(N)}{|N|}$, que satisface todos los axiomas excepto *NULL* u otra *regla alternativa* $\psi_i(N, v) = \lambda\varphi_i(N, v)$ con $\lambda = 1$ que satisface todos los axiomas excepto *EFF*.

Ejercicio 7.2 Cálculo del valor de Shapley en el *juego del reparto* 7.3 y en el *juego del guante* 7.4. ■

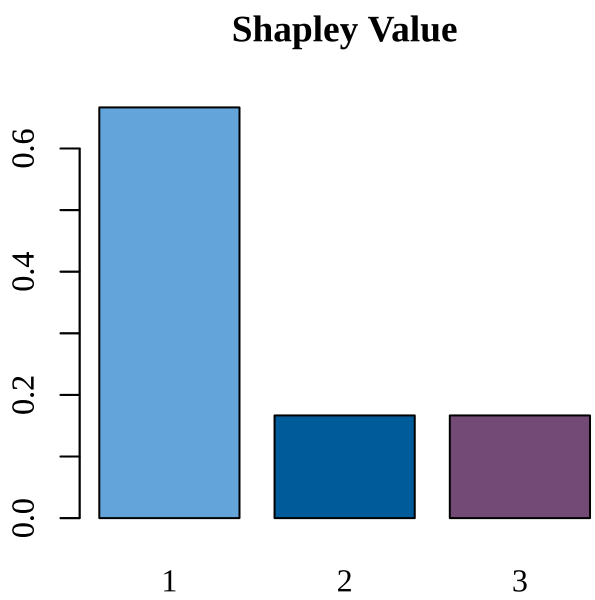
Recurriendo al paquete `GameTheory` se obtienen los siguientes resultados.

```
library(GameTheory)
nombres <- c("Alice","Bob","Charles")
ShapleyValue(juego_reparto,nombres)
```



```
### $SV
###             Shapley Value
### Alice           0.3333333
### Bob             0.3333333
### Charles         0.3333333
###
### attr(,"class")
### [1] "ShapleyValue"
```

```r
library(GameTheory)
nombres <- c("1","2","3")
ShapleyValue(juego_guante,nombres)
```




```
### $SV
###   Shapley Value
### 1      0.6666667
### 2      0.1666667
### 3      0.1666667
###
### attr(,"class")
### [1] "ShapleyValue"
```

Shapley proporcionó una clase interesante de juegos, de gran potencial, para los cuales el *valor de Shapley* siempre pretenece al *núcleo*.

Definición 7.0.13 — Juego convexos.

Sea $(N,v) \in \mathcal{G}^{TU}$, se dice que el juego es **convexo** si para cada $i \in N$, $S,T \subset N \setminus \{i\}$ con $S \subset T$ se cumple,

$$v(T \cup \{i\}) - v(T) \geq v(S \cup \{i\}) - v(S).$$

Todo juego convexo es *superaditivo*. Además Shapley demostró el siguiente resultado.

Teorema 7.0.5 En todo juego convexo el núcleo es no vacío.

Teorema 7.0.6 — Relación entre el valor de Shapley y el núcleo en juegos convexos.

Sea $(N,v) \in \mathcal{G}^{TU}$ un juego convexo entonces $\varphi(N,v) \in C(N,v)$.

Juegos de utilidad no transferible

Los **juegos de utilidad no transferible** se introducen como respuesta a la necesidad de generalizar los problemas de negociación a situaciones en las que un grupo individuos puedan obtener alguna alternativa factible sin requerir un acuerdo con el resto del grupo de la coalición.

Los *pagos laterales* están prohibidos en este tipo de juegos, lo que significa que los jugadores no pueden dividir libremente las ganancias por medio de su cooperación. Sin embargo, esto no implica que los jugadores no puedan llegar a un acuerdo.

Definición 7.0.14 — Conjunto comprensivo - *Comprehensive set*.

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^{|S|}$ se dice comprensivo si satisface que para cada par $x,y \in \mathbb{R}^{|S|}$ si $x \in A$ e $y \leq x$ entonces se tiene que $y \in A$.

Definición 7.0.15 — Juego cooperativo de utilidad no transferible - *Juego NTU*.

[26] Un **juego NTU** es un par (N,V) donde:

- N es el conjunto de jugadores.
- V es una función que asigna a cada coalición $S \subset N$ un conjunto $V(S) \subset \mathbb{R}^{|S|}$ que satisface:

  N1.) $V(S)$ es no vacío y cerrado. Se asume que $V(\emptyset) = \{0\}$.

  N2.) $V(S)$ es un conjunto comprensivo.

  N3.) Para cada $i \in N$ existe un $V_i \in \mathbb{R}$ tal que $V(\{i\}) = (-\infty, V_i]$.

  N4.) El conjunto $\{x \in V(N) : x_i \geq V_i\}$ es un conjunto compacto.

Dado un juego NTU (N, V) y una coalición $S \subseteq N$, se denota por (S, V) al *subjuego* obtenido al restringir V únicamente a las subcoaliciones de S.

La clase de juegos TU es una subfamilia de los juegos NTU. Esto se debe a que los los juegos TU se pueden formular de manera que para cada coalición $S \subseteq N$ existe un número real $v(S)$ tal que:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} x_i \leq v(S)\}.$$

Una familia más general es la de los juegos para los que el conjunto $V(S)$ viene limitado por un hiperplano, son conocidos como *juegos de Hiperplano* y son aquellos juegos NTU para los que $V(S)$ está definido como:

$$V(S) = \{x \in \mathbb{R}^S : \sum_{i \in S} p_i^S \leq r_S\},$$

donde $p_i^S > 0 \ \forall i \in S$ y $r_S \in \mathbb{R}$.

Una familia que contiene a la anterior es la de los juegos NTU que cumplen que la frontera del conjunto de asignaciones para la gran coalición, $V(N)$, es un hiperplano y no impone ninguna condición para los conjuntos $V(S), S \neq N$. Estos juegos son conocidos como *juegos G-hiperplanos* y cumplen:

$$V(N) = \{x \in \mathbb{R}^N : \sum_{i \in S} x_i \leq v(N)\}.$$

N

Se denota por $\mathcal{G}$ denota la clase de juegos de utilidad no transferible. La familia de juegos de Hiperplano recibe la notación $\mathcal{G}^{HIP}$. La familia de juegos G-hiperplanos se denota por $\mathcal{G}^G$.

Proposición 7.0.7 Se tiene que $\mathcal{G}^{TU} \subseteq \mathcal{G}^{HIP} \subseteq \mathcal{G}^G$.

Bibliografía

[1] R.B. Myerson, Game theory, Harvard university press, 2013.

[2] Wikipedia, Teoría de juegos, (2020). https://es.wikipedia.org/wiki/Teoría_de_juegos.

[3] F. Jiménez Ruiz, Financiamiento a partidos políticos y teoría de juegos, 2005.

[4] J. Staudacher, J. Anwander, A. Tiukkel, M. Maerz, F. Mueller, D. Gebele, et al., CoopGame: Important concepts of cooperative game theory, 2019. https://CRAN.R-project.org/package=CoopGame.

[5] M. Shor, Game theory .Net, (2006). http://www.gametheory.net/.

[6] M. Schmid, Game theory and poker, (2013).

[7] E. Prisner, Game theory through examples, Mathematical Association of America, 2014.

[8] M.J. Osborne, A. Rubinstein, A course in game theory, MIT press, 1994.

[9] S. Jackson Matthew O.; Leyton-Brown; Kevin, Stanford game theory online, (2018). http://game-theory-class.org/.

[10] R.S. Bielefeld, Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games, in: Models of Strategic Rationality, Springer, 1988: pp. 1–31.

[11] R.D. McKelvey, T.R. Palfrey, An experimental study of the centipede game, Econometrica: Journal of the Econometric Society. (1992) 803–836.

[12] I. Palacios-Huerta, O. Volij, Field centipedes, American Economic Review. 99 (2009) 1619–35.

[13] N. Iriberri, J. Kovarik, B. Garcia-Pola, Non-equilibrium play in centipede games, (2016).

[14] Wikipedia contributors, Perfect bayesian equilibrium — Wikipedia, the free encyclopedia, (2020).

[15] O. Morgenstern, J. Von Neumann, Theory of games and economic behavior, Princeton university press, 1953.

[16] H.W. Kuhn, A simplified two-person poker, Contributions to the Theory of Games. 1 (1950) 97–103.

[17] A. Pozanco Lancho, Análisis e implementación de un jugador automático de póquer, B.S. thesis, 2015.

[18] N. Brown, T. Sandholm, Superhuman ai for multiplayer poker, Science. 365 (2019) 885–890.

[19] J. Heinrich, D. Silver, Deep reinforcement learning from self-play in imperfect-information games, arXiv Preprint arXiv:1603.01121. (2016).

[20] Wikipedia, Teorema de tradición oral — Wikipedia, la enciclopedia libre, (2019). https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_tradición_oral.

[21] R.A. Española, E. Madrid, Diccionario de la lengua española, Espasa-Calpe, 1970.

[22] È. López Ramiro, An approach to a n-person cooperative games, (2016).

[23] Wikipedia, Teorema de coase — wikipedia, la enciclopedia libre, (2020). https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Coase.

[24] S. Cano-Berlanga, GameTheory: Cooperative game theory, 2017. https://CRAN.R-project.org/package=GameTheory.

[25] J. González-Dıaz, I. Garcıa-Jurado, M.G. Fiestras-Janeiro, An introductory course on mathematical game theory, Graduate Studies in Mathematics. 115 (2010).

[26] H. Peters, NTU-games, Optimization and Operations Research–Volume III. (2009) 181.

[27] M. Dresher, The mathematics of games of strategy, Courier Corporation, 2012.

[28] Y. Xie, Knitr: A general-purpose package for dynamic report generation in r, 2019. https://CRAN.R-project.org/package=knitr.

[29] H. Wickham, Tidyverse: Easily install and load the 'tidyverse', 2019. https://CRAN.R-project.org/package=tidyverse.

[30] R.D. McKelvey, A.M. McLennan, T.L. Turocy, Gambit: Software tools for game theory, (2006). http://www.gambit-project.org/.

[31] P.L. Luque-Calvo, Escribir un trabajo fin de estudios con r markdown, Disponible en http://destio.us.es/calvo, 2017.